

# 教育部九十九學年度高級中學數學競賽

## 台中區複賽試題（二）

（時間一小時）

注意事項：

1. 本試卷共四題填充題，滿分為二十一分。
  2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。
- 

一、設  $A = \left\{ (x-y, y-z, z-x) \mid \begin{array}{l} x(x-1) + 2yz \\ = y(y-1) + 2zx, \\ = z(z-1) + 2xy \end{array} \quad x, y, z \in \square \right\}$ ，試求  $A$ 。

(5 分)

二、記不大於  $t$  的整數中最大的整數為  $[t]$ 。求方程

$$[x^2 - 2x] + 2[x] = [x]^2$$

在  $0 \leq x < 3$  內所有實數解。(5 分)

三、設  $a$  和  $b$  為實數，且使方程

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

至少有一個實根，對所有這種數對  $(a, b)$ ，求出  $a^2 + b^2$  的最小可能值。

(6 分)

四、令  $N$  為自然數集，若函數  $f: N \rightarrow N$  滿足  $f(n+1) > f(n)$  且  $f(f(n)) = 3n$ ，

求  $f(54)$ 。(5 分)