

# 教育部九十九學年度高級中學數學競賽

## 台中區複賽試題（一）

（時間二小時）

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為四十九分。
  2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。
- 

一、 $\triangle ABC$  為等邊三角形， $P$  為其內一動點，且  $\angle APC = 120^\circ$ 。 $AP$  交  $BC$  於  $N$ 、 $CP$  交  $AB$  於  $M$ 。求  $\triangle BMN$  外心  $O$  的軌跡。(12 分)

二、任意選 24 個相異且小於 88 的正奇數，試證：其中必有兩個數它們的和是 90。(12 分)

三、試證：對實數  $a, b, c, d \geq 0$ ，

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2)(d^2 + 2) \geq 4(a + b)(b + c)(c + d)(d + a)。(12 分)$$

四、定義：設  $A$  是二階整係數方陣，若存在二階整係數方陣  $B$ ，使得

$$AB = BA = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}，則稱  $A$  可逆。(13 分)$$

(1)  $A$  是二階整係數方陣。試證： $A$  可逆的充要條件為  $A$  的行列式  $|A| = \pm 1$ 。

(2) 設  $A, B$  均為二階整係數方陣，且  $A, A + B, A + 2B, A + 3B, A + 4B$  均可逆，試證： $A + 5B$  亦可逆。