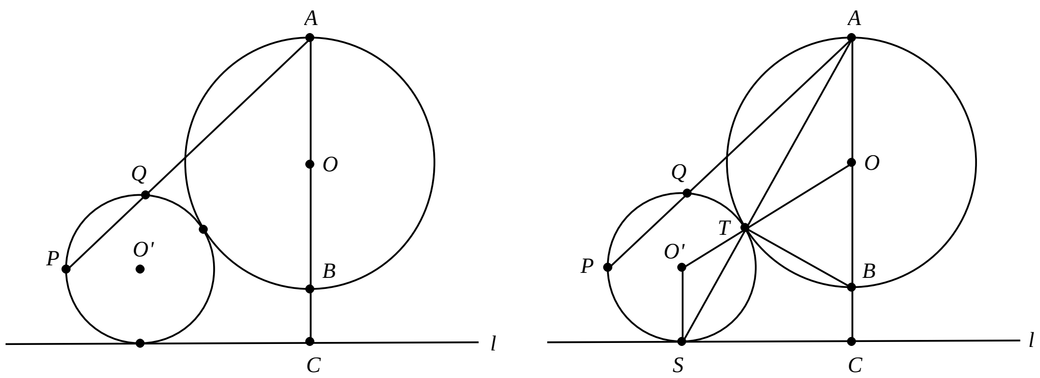
台北市九十九學年度

高中數學及自然學科能力競賽

（數學科筆試一解答）

【問題一】 給定不相交的一圓 O 與一直線 l。過圓心 O 且與直線 l 垂直的直線交圓 O 於點 A 與 B、又交直線 l 於點 C，設 $\overline{AC}>\overline{BC}$。若一圓 O' 與直線 l 相切且與圓 O 外切，而過點 A 的一直線與圓 O' 交於點 P 與 Q，試證：

$$\overline{AP}\times\overline{AQ}=\overline{AB}\times\overline{AC}\text{ 。}\qquad\text{（12 分）}$$



【證】 設圓 O' 與直線 l 相切於點 S 且與圓 O 外切於點 T。先證：點 A、S、T 共線。連接 $\overline{AT}$ 與 $\overline{ST}$。

因為圓 O 與圓 O' 外切，所以，圓心 O、圓心 O'、切點 T 等三點共線，且點 T 介於點 O 與點 O' 之間。因為圓 O' 與直線 l 相切於點 S，所以，直線 $O'S$ 與直線 l 垂直。於是，$\overline{O'S}$ 與 $\overline{OA}$ 平行。由此可知：$\angle AOT=\angle SO'T$。（內錯角相等）

因為 $\triangle OAT$ 與 $\triangle O'ST$ 都是等腰三角形，而且頂角 $\angle AOT$ 與 $\angle SO'T$ 相等，所以，底角 $\angle ATO$ 與 $\angle STO'$ 相等。於是，得

$$\angle ATO+\angle STO=\angle STO'+\angle STO=180^\circ\text{，}$$

亦即：點 A、S、T 共線。

其次，因為 $\overline{AQP}$ 與 $\overline{ATS}$ 是圓 O' 過點 A 的兩割線段，所以，依圓冪定理，得

$$\overline{AP}\times\overline{AQ}=\overline{AS}\times\overline{AT}\text{ 。}$$

另一方面，因為△ABT與△ASC都是直角三角形，而且兩銳角$\angle BAT$與$\angle SAC$相等，所以，△ABT與△ASC相似。於是，得

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AS}}=\frac{\overline{AT}}{\overline{AC}}\ ，$$

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{AS}\times\overline{AT}\ 。$$

綜合上述兩式，即得$\overline{AP}\times\overline{AQ}=\overline{AB}\times\overline{AC}$ 。 ∥

【問題二】 試求$\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2+(x+y+6)^2}+\sqrt{(x+3)^2+(y-3)^2+(x+y+4)^2}$的最小值。 （12 分）

【解】 設$A(1,\ -2,\ -6)$、$B(-3,\ 3,\ -4)$為空間直角坐標系中的兩定點，

E 為 $z=x+y$ 的平面，則當$P(x,\ y,\ z)$為平面E 上的任一點時，

原式$=\sqrt{(x-1)^2+(y-(-2))^2+(z-(-6))^2}+\sqrt{(x-(-3))^2+(y-3)^2+(z-(-4))^2}$

$=\overline{AP}+\overline{BP}$

注意：$1+(-2)+6>0$，$-3+3+4>0$，A、B 在平面 E 所分成的同一半空間中，最小值產生的點P_0應落在A對平面E的對稱點A'上，$\overline{A'B}$與平面E的交點P_0上，此時最小值為 $\overline{AP_0}+\overline{BP_0}=\overline{A'B}$ 。

以下首先找對稱點A'：

由於平面E的法向量為 $(1,\ 1,\ -1)$，於是過A垂直平面E的參數式L可設為：$x=1+t$ ，$y=-2+t$ ，$z=-6-t$

A到平面E：$z=x+y$ 的距離為$\dfrac{1+(-2)+6}{\sqrt{3}}=\dfrac{5}{\sqrt{3}}=\dfrac{5}{3}\sqrt{3}$

在L上找出A'在平面E與A不同側的半空間使 $\overline{AA'}=\dfrac{10}{3}\sqrt{3}$

即求 $3t^2=\dfrac{100}{3}$，故 $t=\pm\dfrac{10}{3}$（正不合）$\Rightarrow$ $t=\dfrac{-10}{3}$

故 $A'(-\dfrac{7}{3},\ -\dfrac{16}{3},\ -\dfrac{8}{3})$

此時 $\overline{A'B}=\sqrt{(-3+\dfrac{7}{3})^2+(3+\dfrac{16}{3})^2+(4-\dfrac{8}{3})^2}$

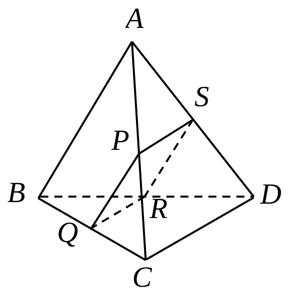
$=\sqrt{\dfrac{4}{9}+\dfrac{625}{9}+\dfrac{16}{9}}$

$=\dfrac{1}{3}\sqrt{645}$

【問題三】如圖，A-BCD 為一每邊長 $6\sqrt{2}$ 公分的正四面體，P、Q、R 依序為 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 及 $\overline{BD}$ 三邊的中點，$\triangle PQR$ 所決定的平面 E 交 $\overline{AD}$ 於 S。

(1) 試證 $PQRS$ 為一正方形。

(2) 試求立體 $BAPQRS$ 的體積。（12 分）



【證】(1) 先證 S 為 $\overline{AD}$ 的中點：

取 $\overline{AD}$ 的中點 S' ，則 $\overrightarrow{PS'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ ，$\overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ ，

故得 $\overrightarrow{PS'}=\overrightarrow{QR}$ ，所以 $PQRS'$ 為平行四邊形。

$\therefore$ S' 為$\triangle PQR$ 所決定的平面 E 與 $\overline{AD}$ 的交點，

故知 S' 與 S 為同一點，即 S 為 $\overline{AD}$ 的中點，

即 $PQRS$ 為一平行四邊形。

另 $\overline{PQ}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\overline{QR}$ ，進一步知 $PQRS$ 為菱形，

最後再證 $\angle SPQ=90°$，即可得證 $PQRS$ 為正方形：

$\overrightarrow{PS}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ ，$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})$

$$\begin{aligned}
\therefore\ \overrightarrow{PS}\cdot\overrightarrow{PQ}&=\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})\\
&=\frac{1}{4}(\ \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AC}\ +\ \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB}\ )\\
&=\frac{1}{4}(\ \overline{CD}\ \times\ \overline{AC}\cos 120°\ +\ \overline{CD}\ \times\ \overline{CB}\cos 60°\ )\\
&=\frac{1}{4}(-\frac{1}{2}\overline{CD}^2+\frac{1}{2}\overline{CD}^2)\\
&=0
\end{aligned}$$

故知 $\overrightarrow{PS}\ \perp\ \overrightarrow{PQ}\quad\Rightarrow\quad\angle SPQ=90°$

(2) 由 (1) 知平面 E 將正四面體 A-BCD 平分成兩個全等的立體，

故知立體 $BAPQRS$ 的體積為正四面體 $A\text{-}BCD$ 的 $\frac{1}{2}$，

而正四面體的體積可推得邊長立方的 $\frac{\sqrt{2}}{12}$，

故立體 $BAPQRS$ 的體積為 $\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot(6\sqrt{2})^3=36\ (cm^3)$

【問題四】 平面上有 99 條相異的直線 $L_n\ (n=1,2,3,\cdots,99)$，設直線 L_n 上有一點 P_n (a_n,b_n) 滿足

$$\sqrt{2a_n-b_n}\ge a_{n+1}-\frac{b_{n-1}-1}{2},\ n=1,2,3,\cdots,99\text{，}$$

其中 $a_{100}=a_1$ 且 $b_0=b_{99}$。試證：這 99 條直線 L_n 共點。（13 分）

【解】 我們先證明每一個點 $P_n(a_n,b_n)$ 都在直線 $y=2x-1$ 上。

合併所有不等式，得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{99}\sqrt{2a_n-b_n}&\ge\sum_{n=1}^{99}\left(a_{n+1}-\frac{b_{n-1}-1}{2}\right)\\&=\sum_{n=1}^{99}a_{n+1}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{99}b_{n-1}+\frac{99}{2}\\&=\sum_{n=1}^{99}a_n-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{99}b_n+\frac{99}{2}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{99}(2a_n-b_n+1)\text{。}\end{aligned}$$

於是，

$$\begin{aligned}0&\ge\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{99}(2a_n-b_n+1)-\sum_{n=1}^{99}\sqrt{2a_n-b_n}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{99}\left(2a_n-b_n+1-2\sqrt{2a_n-b_n}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{99}\left(\sqrt{2a_n-b_n}-1\right)^2\ge0\text{。}\end{aligned}$$

由此可得 $\sqrt{2a_n-b_n}=1$（$n=1,2,3,\cdots,99$），即 $b_n=2a_n-1$，

故點 $P_n(a_n,b_n)$ 都在直線 $y=2x-1$ 上。

又此時，原不等式都必須是等式，得知

$$1=\sqrt{2a_n-b_n}=a_{n+1}-\frac{b_{n-1}-1}{2},\ n=1,2,3,\cdots,99\text{。}$$

(i) 當 $n=1$ 時，$1=a_2-\frac{b_0-1}{2}=a_2-\frac{b_{99}-1}{2}=a_2-\frac{2a_{99}-2}{2}=a_2-a_{99}+1$，

得知　$a_2=a_{99}$。

(ii) 當 $n=99$ 時，$1=a_{100}-\frac{b_{98}-1}{2}=a_1-\frac{2a_{98}-2}{2}=a_1-a_{98}+1$，

得知　$a_1=a_{98}$。

(iii) 當 $n\in\{2,3,4,\cdots,98\}$ 時，

$1=a_{n+1}-\frac{b_{n-1}-1}{2}=a_{n+1}-\frac{2a_{n-1}-2}{2}=a_{n+1}-a_{n-1}+1$，

得知 $a_{n+1}=a_{n-1}$；故 $a_1=a_3=a_5=\cdots=a_{99}$ 且 $a_2=a_4=a_6=\cdots=a_{98}$。

因此，可得 $a_1=a_2=a_3=\cdots=a_{99}$，於是，$b_1=b_2=b_3=\cdots=b_{99}$；

亦即這 99 個點 P_n 是同一點，且為這 99 條直線 L_n 的共同交點。