

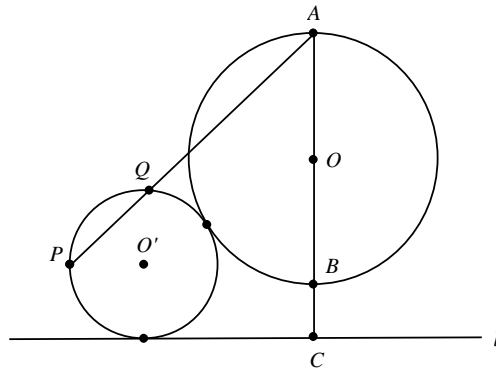
台北市九十九學年度
高中數學及自然學科能力競賽
數學科筆試（一）試題

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一：給定不相交的一圓 O 與一直線 l 。過圓心 O 且與直線 l 垂直的直線交圓 O 於點 A 與 B 、又交直線 l 於點 C ，設 $\overline{AC} > \overline{BC}$ 。若一圓 O' 與直線 l 相切且與圓 O 外切，而過點 A 的一直線與圓 O' 交於點 P 與 Q ，試證：

$$\overline{AP} \times \overline{AQ} = \overline{AB} \times \overline{AC}。 \quad (12 \text{ 分})$$



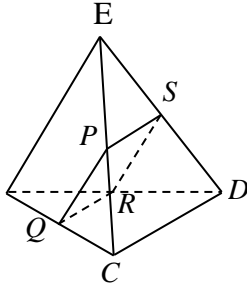
問題二：試求 $\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2 + (x+y+6)^2} + \sqrt{(x+3)^2 + (y-3)^2 + (x+y+4)^2}$ 的最小值。

(12 分)

問題三：如圖， $A-BCD$ 為一每邊長 $6\sqrt{2}$ 公分的正四面體， P 、 Q 、 R 依序為 \overline{AC} 、 \overline{BC} 及 \overline{BD} 三邊的中點， $\triangle PQR$ 所決定的平面 E 交 \overline{AD} 於 S 。

(1) 試證 $PQRS$ 為一正方形。

(2) 試求立體 $BAPQRS$ 的體積。 (12 分)



問題四：平面上有 99 條相異的直線 L_n ($n=1,2,3,\dots,99$)，設直線 L_n 上有一點 P_n (a_n, b_n) 滿足

$$\sqrt{2a_n - b_n} \geq a_{n+1} - \frac{b_{n-1} - 1}{2}, n=1,2,3,\dots,99,$$

其中 $a_{100} = a_1$ 且 $b_0 = b_{99}$ 。試證：這 99 條直線 L_n 共點。 (13 分)