台北市九十九學年度

高中數學及自然學科能力競賽

（數學科口試解答）

【試題一】 給定實數 a、b、c、d，已知方程式 $x^2+ax+b=0$ 和 $x^2+cx+d=0$ 所有實根的絕對值都小於 1。證明：$x^2+(a+c)x+2(b+d)=0$ 所有實根的絕對值都小於 2。

【解答】 由假設得知 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ，$|\alpha| \geq 1$ 我們有

$$\alpha^2+a\alpha+b>0$$

$$\alpha^2+c\alpha+d>0 \quad \text{得到} \quad 2\alpha^2+(a+c)\alpha+(b+d)>0$$

令 $\left|\frac{\beta}{2}=\alpha\right| \geq$ 代入，得到

$\forall \beta \in \mathbb{R}$ ，$|\beta| \geq 2$ 有 $\beta^2+(a+c)\beta+2(b+d)>0$

即所有實根必落在 $|x| < 2$

....

【試題二】 已知數列 $<a_n>$ 定義如下：

(1) $a_1=2$

(2) $a_{n+1}=a_n\times\frac{2n}{2n-1}\times\frac{2n}{2n+1}$ ，$n\geq 1$

試證：$a_n<4$ 對每一正整數 n 恆成立。

【解答】 由 $a_1=2<4$

知 $a_2=a_1\times\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}=(2\times 2)\times\frac{2}{3}<4$

$$a_3=a_2\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}=(2\times 2)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)\times\frac{4}{5}<4$$

$$a_4=a_3\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}=(2\times 2)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)\times\left(\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\right)\times\frac{6}{7}<4$$

$$\vdots$$

設 $a_n=(2\times 2)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)\times\cdots\times\left(\frac{2n-4}{2n-3}\times\frac{2n-2}{2n-3}\right)\times\frac{2n-2}{2n-1}$

$< (2\times 2)\times 1\times 1\times\cdots\times 1\times 1=4$ ， $n\geq 2$

則 $a_{n+1}=a_n\times\dfrac{2n}{2n-1}\times\dfrac{2n}{2n+1}$

$=(2\times 2)\times(\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{3})\times\cdots\times(\dfrac{2n-4}{2n-3}\times\dfrac{2n-2}{2n-3})\times\dfrac{2n-2}{2n-1}\times\dfrac{2n}{2n-1}\times\dfrac{2n}{2n+1}$

$=(2\times 2)\times(\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{3})\times\cdots\times(\dfrac{2n-2}{2n-1}\times\dfrac{2n}{2n-1})\times\dfrac{2n}{2n+1}$

但 $0<\dfrac{(2n-2)\times 2n}{(2n-1)(2n-1)}=\dfrac{4n^2-4n}{4n^2-4n+1}<1 \qquad \forall n\geq 2$

故 $a_{n+1}<(2\times 2)\times 1\times 1\times\cdots\times 1\times 1=4$ 得證