九十九學年度台灣省第七區(台南區)
高級中學數理及資訊學科能力競賽複試試題

數學科筆試（二）試題及參考解答

一、已知 $x^4+y^4=\dfrac{13}{3}$ 且 $x^2+y^2=\dfrac{17}{3}$，試求 $x^4+y^4+x^3y+xy^3$ 之值。

Sol:

因為

$$x^4+y^4=\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2,\ x^4+y^4=\frac{13}{3}\quad ,\ x^2+y^2=\frac{17}{3}$$

所以 $xy=\pm\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$

故所求 $x^4+y^4+x^3y+xy^3=\left(x^4+y^4\right)+xy\left(x^2+y^2\right)=\dfrac{39\pm 85\sqrt{5}}{9}.$

二、設$0<\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+5x+4}<1$，求$x$的範圍。

Sol: $0<\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+5x+4}\Rightarrow 0<\left(x^2-5x+6\right)\left(x^2+5x+4\right)=\left(x-2\right)\left(x-3\right)\left(x+1\right)\left(x+4\right)$

$\Rightarrow x>3$或$-1<x<2$或$x<-4$……………………………………………………（1）

$\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+5x+4}<1\Rightarrow 0>\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+5x+4}-1=\dfrac{-10x+2}{x^2+5x+4}\Rightarrow\left(x+1\right)\left(x+4\right)\left(5x-1\right)>$

$\Rightarrow x>\dfrac{1}{5}$或$-4<x<-1$………………………………………………………（2）

（1）（2）$\Rightarrow\dfrac{1}{5}<x<2$或$x>3$

三、令c,d為任意實數常數，試證方程式$x=c+d\cos(x)$至少有一實數解。

Sol:

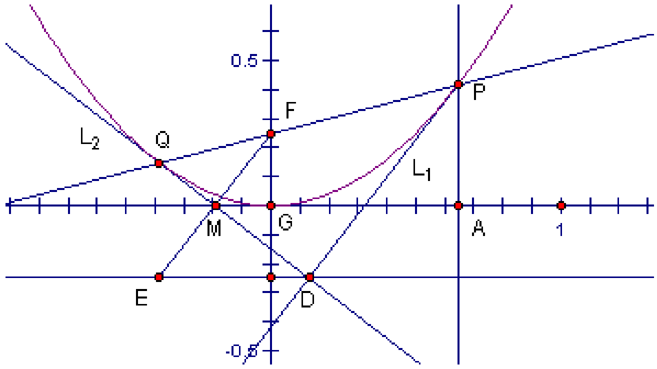
令 $f(x)=x-c-d\cos(x)$ 則

$f(c+d)f(c-d)=-d^2(1-\cos(c+d))(1+\cos(c+d))\le 0$

所以$x=c+d\cos(x)$至少有一實數解

四、抛物線 $y = x^2$ 上的兩點 P、Q，在 P、Q 兩點的切線設為 L_1、L_2，如果 L_1、L_2 互相垂直，試証明：L_1 與 L_2 的交點落在準線上。

Sol:



Let P be P(x_0, y_0), where $y_0 = x_0*x_0$.

L1: $(y+y_0)/2 = x_0*x$

$y + y_0 = 2x_0*x$

Let Q be Q(x1, y1), where y1 = x1*x1.

L2: (y+y1)/2 = x1*x

y + y1 = 2x1*x

L1 ⊥ L2 ➔ 2 x_0*2x1= -1 ➔ x1 = -1/(4x_0).

(Note: P, F, Q are collinear, y = 4cy = x^2, F(0, c) = F(0, 1/4))

The intersection of L1 and L2 is the solution of the equations

$y + x_0^2 = 2x_0*x$ ------(1)

$y + 1/(16x_0^2) = -1/(2x_0)*x$ ----(2)

(2)* $4x_0^2$ + (1), we have

$(1+4 x_0^2)y + (x_0^2+1/4)= 0$ ---- (3)

(3) / $(1+4 x_0^2)$ 得

y = -1/4. (準線方程式)