九十九學年度台灣省第八區(台南區)
高級中學數理及資訊學科能力競賽複試試題
數學科筆試（一）試題及參考解答

一、令 x 為任意實數且 $x+\dfrac{1}{x}$ 為整數，試證對於所有自然數 n ，$x^n+\dfrac{1}{x^n}$ 為整數

Sol: $n=0, n=1$時 $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ 為整數

而 $x^n+\dfrac{1}{x^n}=(x^{n-1}+\dfrac{1}{x^{n-1}})(x+\dfrac{1}{x})-(x^{n-2}+\dfrac{1}{x^{n-2}})$

假設對於 $0\le m<n$ ，$x^m+\dfrac{1}{x^m}$ 為整數 利用數學歸納法推得

對於所有 $n\in N$ $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ 為整數。

二、令點 (x,y) 在圓上 $x^2+y^2=16$ 移動，試求 $3x-4y$ 的最大值與最小值，同時求出圓上那些點使得 $3x-4y$ 為最大值，圓上那些點使得 $3x-4y$ 為最小值。

解: $(3x-4y)^2\le\left[x^2+y^2\right]\left[3^2+(-4)^2\right]$

$\Rightarrow (3x-4y)^2\le 16\cdot 25=400$

$\Rightarrow -20\le 3x-4y\le 20$

令 $(x,y)=(3t,-4t)$ 代入 $20=3x-4y$ 得 $20=9t+16t=25t\Rightarrow t=\dfrac{4}{5}\Rightarrow$

$$(x,y)=\left(\frac{12}{5},-\frac{16}{5}\right)$$

令 $(x,y)=(3t,-4t)$ 代入 $-20=3x-4y$ 得-$-20=9t+16t=25t\Rightarrow t=\dfrac{-4}{5}\Rightarrow$

$$(x,y)=\left(-\frac{12}{5},\frac{16}{5}\right)$$

三、設 $a,b,c\in$□ 且 $a,b,c>0$，則對於任一 $m\in$□ ，試證明：

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)^m+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^m+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)^m\ge 3\cdot 2^m$$

Sol: 1.利用 AM-GM 不等式

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)^m+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^m+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)^m \ge \left(2\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^m+\left(2\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^m+\left(2\sqrt{\frac{c}{b}}\right)^m$$

$$\ge 3\left\{\left(2\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^m\cdot\left(2\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^m\cdot\left(2\sqrt{\frac{c}{b}}\right)^m\right\}^{1/3}$$

$$=3\left\{2^{3m}\right\}^{1/3}=3\cdot 2^m$$

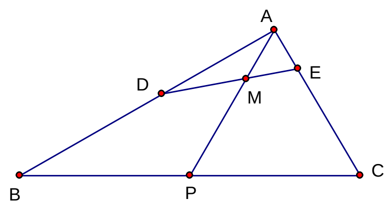
四、點 P 是△ABC 邊 $\overline{BC}$ 的中點，點 M 是線段 $\overline{AP}$ 上的一點滿足 $\overline{AM}:\overline{AP}=1:3$，直線 $\overleftrightarrow{DE}$ 經過 M 點且分別交線段 $\overline{AB},\overline{AC}$ 於 D、E 兩點。已知△ABC 的面積是 36，令 $\alpha=\dfrac{\text{四邊形}BPMD\text{的面積}}{\Delta ADM\text{的面積}}$ ，$\beta=\dfrac{\text{四邊形}CPME\text{的面積}}{\Delta AEM\text{的面積}}$， 試証 $\alpha+\beta$ 是一定值。

Sol:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$

令 AB / AD = s, AC /AE = t



$$\overrightarrow{AM}=\frac{s}{6}\overrightarrow{AD}+\frac{t}{6}\overrightarrow{AE}$$

s/6 + t/6 = 1

s + t = 6

設△ADM 面積 = a，△AEM 面積 = b。

△ABM = 1/3 △ABP = 1/6 △ABC = 6

△ABM/△ADM = s，△ABM /a = s， 1/a = s/6

同理，1/b = t/6。

1/a + 1/b = (s + t)/6 = 6/6 = 1

四邊形 BPMD 的面積 = 1/2 △ABC 的面積 – △ADM 面積 = 18 – a

四邊形 CPME 的面積 = 1/2 △ABC 的面積 – △AEM 面積 = 18 – b

(四邊形 BPMD 的面積 / △ADM 面積) + (四邊形 CPME 的面積 / △AEM 面積) = 18/a – 1 + 18/b – 1 = 18(1/a + 1/b) – 2 = 18 – 2 = 16。