

九十九學年度台灣省第八區(台南區)
高級中學數理及資訊學科能力競賽複試試題
數學科筆試(一) 試題

注意事項：

(1)時間分配：2 小時

(2)本試卷共四題，滿分 49 分。第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。不可使用電算器。

(4)試題與答案卷一同繳回。

一、令 x 為任意實數且 $x + \frac{1}{x}$ 為整數，試證對於所有自然數 n ， $x^n + \frac{1}{x^n}$ 為整數

二、令點 (x, y) 在圓上 $x^2 + y^2 = 16$ 移動，試求 $3x - 4y$ 的最大值與最小值，同時求出圓上那些點使得 $3x - 4y$ 為最大值，圓上那些點使得 $3x - 4y$ 為最小值。

三、設 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 且 $a, b, c > 0$ ，則對於任一 $m \in \mathbb{R}$ ，試證明：

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c}\right)^m + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^m + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{b}\right)^m \geq 3 \cdot 2^m.$$

四、點 P 是 $\triangle ABC$ 邊 \overline{BC} 的中點，點 M 是線段 \overline{AP} 上的一點滿足 $\overline{AM} : \overline{AP} = 1:3$ ，直線 \overline{DE}

經過 M 點且分別交線段 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 於 D, E 兩點。已知 $\triangle ABC$ 的面積是 36，令

$$\alpha = \frac{\text{四邊形BPMD的面積}}{\triangle ADM \text{的面積}}, \quad \beta = \frac{\text{四邊形CPME的面積}}{\triangle AEM \text{的面積}}, \quad \text{試證 } \alpha + \beta \text{ 是一定值。}$$

