

九十九學年度台灣省第三區(新竹高中)

高級中學數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試(一) 試題

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一：設 \overline{AB} 為圓 $x^2 + y^2 = 37$ 的一弦，若點 $P(1, 2)$ 在 \overline{AB} 上，且為 \overline{AB} 的三等分點之一，試求直線 AB 的方程式。 (16 分)

問題二：將 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 分成 3 組三位數，使它們滿足下列運算式：

$$\square\square\square + \square\square\square = \square\square\square,$$

即每一格只能填入 1 至 9 的數字，且不能重複，例如： $125 + 739 = 864$ 。

試問滿足條件的分組方式共有多少種？ (16 分)

問題三：設無窮數列 $\langle a_n \rangle$ ：121, 1221, 12221, ……，其一般項 $a_n = 122 \cdots 21$ (兩個 1 之間恰有 n 個 2)；並設集合 S 表示同時滿足以下兩條件的正整數 k 所成的集合：

(1) $k \in \{1, 2, 3, \dots, 2010\}$ ；

(2) 數列 $\langle a_n \rangle$ 中有無限多項是 k 的倍數。

(a) 試說明 $99 \in S$ 。 (5 分)

(b) 試求集合 S 中所有數的和。 (12 分)