九十九學年度台灣省第二區(新店高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（一）試題及參考解答

問題一：(1)設 L 為橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 之一條切線，若 L 的斜率為 m ，試證： L 的方程式為 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ 。(8 分)

(2)求橢圓 $x^2+5y^2=5$ 與圓 $(x+2)^2+y^2=5$ 之所有公切線的方程式。(8 分)

(合計 16 分)

【証明】：

(a)設 L 的方程式為 $y=mx+k \quad \cdots \quad (1)$

將 L 代入橢圓方程式，消去 y 後得到

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+k)^2}{b^2}=1 \quad \Leftrightarrow \quad (m^2a^2+b^2)x^2+2a^2kmx+a^2(k^2-b^2)=0 \quad \cdots \quad (2)$$

因為 L 是切線，所以方程式(2)有重根，亦即其判別式為 0 ，故有

$$4a^4k^2m^2-4(a^2m^2+b^2)a^2(k^2-b^2)=0 \Leftrightarrow k^2=a^2m^2+b^2 \Leftrightarrow k=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

因此 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ 。

(b)橢圓方程式為 $x^2+5y^2=5 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{1}=1$，圓的方程式為

$(x+2)^2+y^2=5 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{(x+2)^2}{5}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 。

設公切線的斜率為 m ，則由(a)可知對橢圓之切線為 $y=mx\pm\sqrt{5m^2+1} \quad \cdots \quad (1)$

對圓之切線為 $y=m(x+2)\pm\sqrt{5m^2+5} \quad \cdots \quad (2)$

因為(1)與(2)代表同一公切線，所以 $mx\pm\sqrt{5m^2+1}=m(x+2)\pm\sqrt{5m^2+5}$ 。

將此式化簡，可得到

$$\pm\sqrt{5m^2+1}=2m\pm\sqrt{5m^2+5} \Leftrightarrow 4m^2+4=\mp 4m\sqrt{5m^2+5}$$

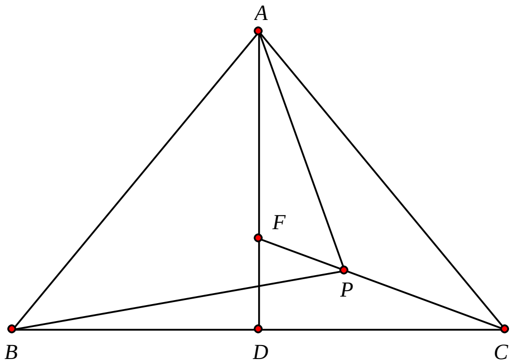
由此得到 $m=\pm\dfrac{1}{2}$ 。

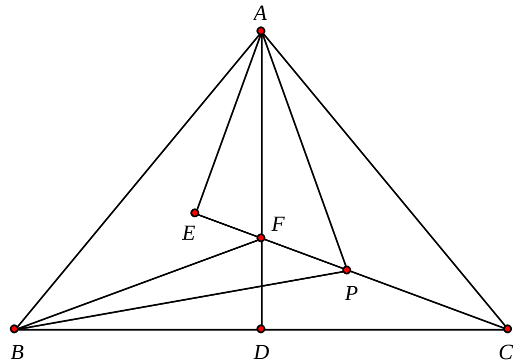
(i)當$m=\dfrac{1}{2}$時，$y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$；

(ii)當$m=-\dfrac{1}{2}$時，$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$。

共二條公切線。

問題二： 設$\triangle ABC$ 滿足$\overline{AB}=\overline{AC}$。若點$P$是$\triangle ABC$ 的內部一點，且$\angle ACP=30^\circ$、$\angle PCB=2\angle PBC$。若直線 CP 與中線$\overline{AD}$交於點 F，試證：$\overline{AP}$是$\triangle AFC$ 的一內角平分線。 (16 分)





【証明】： 過A作直線CP的垂直線，設垂足為E。在直角三角形$\triangle AEF$與$\triangle CDF$中，因為$\angle AFE=\angle CFD$，所以，$\angle EAF=\angle DCF$。因為$\overline{AB}=\overline{AC}$且$\overline{AD}$與$\overline{BC}$垂直，所以，$\overline{FB}=\overline{FC}$，$\angle DCF=\angle DBF$。由此可得$\angle EAF=\angle DBF$。於是，$\triangle AEF$與$\triangle BDF$相似，因而得

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BF}}\ 。$$

因為$\angle FBC=\angle PCB=2\angle PBC$，所以，$\overrightarrow{BP}$平分$\angle CBF$。由此得

$$\frac{2\overline{BD}}{\overline{BF}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BF}}=\frac{\overline{PC}}{\overline{PF}}\ 。$$

在直角三角形$\triangle ACE$中，因為$\angle ECA=30^\circ$，所以，$\overline{AC}=2\overline{AE}$。由此得

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AF}}=\frac{2\overline{AE}}{\overline{AF}}=\frac{2\overline{BD}}{\overline{BF}}=\frac{\overline{PC}}{\overline{PF}}\ 。$$

於是，$\overrightarrow{AP}$平分$\angle FAC$。 ∥

問題三： 設數列$\{a_n\}$滿足：$a_1=a_2=1$ 及$a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}^2+a_{n+1}+1}{a_n},\forall n=1,2,\cdots.$

試證：數列$\{a_n\}$中任意相鄰兩項都是互質的整數。 (17 分)

【証明】： $a_1=1$**，**$a_2=1$**，**$a_3=3$**，**$a_4=13$**，**$a_5=\frac{183}{3}=61$**，**$a_6=\frac{61^2+61+1}{13}=291$

當$n=2,3,4,5,6$時a_n都是整數且$(a_n,a_{n-1})=1$

用數學歸納法

設當$2\le i\le n$時，a_i都是整數且$(a_i,a_{i-1})=1$

$$則\ a_{n+1}=\frac{a_n^2+a_n+1}{a_{n-1}}=\frac{\left(\dfrac{a_{n-1}^2+a_{n-1}+1}{a_{n-2}}\right)^2+\left(\dfrac{a_{n-1}^2+a_{n-1}+1}{a_{n-2}}\right)+1}{a_{n-1}}$$

$$=\frac{a_{n-1}^3+2a_{n-1}^2+3a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-2}a_{n-1}+2+\dfrac{a_{n-2}^2+a_{n-2}+1}{a_{n-1}}}{a_{n-2}^2}$$

$$=\frac{a_{n-1}^3+2a_{n-1}^2+3a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-2}a_{n-1}+2+a_{n-3}}{a_{n-2}^2}$$

設$a_{n+1}=\frac{q}{p}$，p,q為整數，$(p,q)=1$，則$p\,|\,q\cdot a_{n-2}^2\Rightarrow p\,|\,a_{n-2}^2$

又$\frac{a_n^2+a_n+1}{a_{n-1}}=\frac{q}{p}\Rightarrow p\,|\,q\cdot a_{n-1}\Rightarrow p\,|\,a_{n-1}$

因為$(a_{n-1},a_{n-2})=1$所以$p=1$

因此a_{n+1}為整數。

令$(a_{n+1},a_n)=k$，又$a_{n+1}\cdot a_{n-1}=a_n^2+a_n+1$

$\Rightarrow k\,|\,a_{n+1}\cdot a_{n-1}$

$\Rightarrow k\,|\,a_n^2+a_n+1$

$\Rightarrow k\,|\,1$

$\Rightarrow k=1$所以$(a_{n+1},a_n)=1$

由數學歸納法，a_n都是整數且$(a_{n+1},a_n)=1$