

九十九學年度台灣省第二區(新店高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試(一) 試題

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程依序填寫在答案卷內。

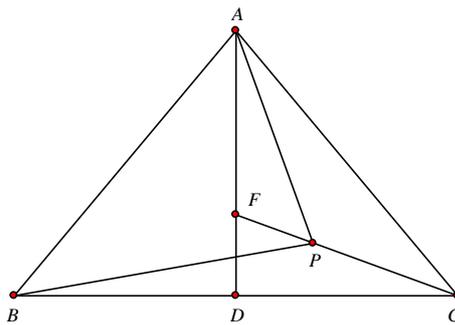
問題一：(1) 設 L 為橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 之一條切線，若 L 的斜率為 m ，試證： L 的方程式

$$\text{為 } y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2} \text{。 (8 分)}$$

(2) 求橢圓 $x^2 + 5y^2 = 5$ 與圓 $(x+2)^2 + y^2 = 5$ 之所有公切線的方程式。(8 分)

(合計 16 分)

問題二：設 $\triangle ABC$ 滿足 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 。若點 P 是 $\triangle ABC$ 的內部一點，且 $\angle ACP = 30^\circ$ 、 $\angle PCB = 2\angle PBC$ 。若直線 CP 與中線 \overline{AD} 交於點 F ，試證： \overline{AP} 是 $\triangle AFC$ 的一內角平分線。(16 分)



問題三：設數列 $\{a_n\}$ 滿足： $a_1 = a_2 = 1$ 及 $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + a_{n+1} + 1}{a_n}$ ， $\forall n = 1, 2, \dots$

試證：數列 $\{a_n\}$ 中任意相鄰兩項都是互質的整數。(17 分)