台灣省第一區九十九學年度（花蓮高中）
高級中學數學及自然科能力競賽
數學科筆試(二)試題

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題 3 分，滿分為 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫在答案欄內。

1. 數學家歐拉（Euler）在他的名著「代數基礎」中有這麼一道題：

一位父親臨死時叫他的幾個孩子按照下列方式分配他的財產：

第一個孩子先分得 100 克朗與剩下財產的 $\frac{1}{10}$；

接著，第二個孩子分得 200 克朗與剩下財產的 $\frac{1}{10}$；

再由第三個孩子分得 300 克朗與剩下財產的 $\frac{1}{10}$；

第四個孩子分得 400 克朗與剩下財產的 $\frac{1}{10}$；

⋮

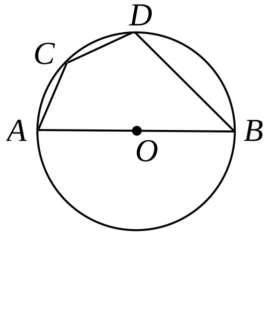
依此類推，直到把全部財產都分完，且知道結果所有的孩子分得一樣多的財產。

求這位父親共有財產___（一）___克朗。

2. 設 $f(x)=(a-1)(\log_5 x)^2-8a\log_5 x+3a+1$。求 x 的範圍 D，使得當 $0\le a\le 1$ 時，x 在這範圍內，$f(x)$ 的值恆為正數，則 $D=$___（二）___。

3. 設 k 是正整數，若方程式 $x^3+(k+41)x^2+(k+142)x+102=0$ 的根都是整數，則 $k=$___（三）___。

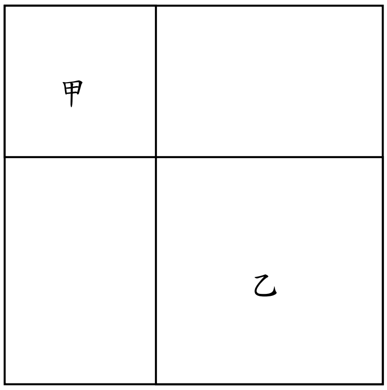
4. 如圖，$\overline{AB}$ 為圓 O 的直徑，C、D 在圓上。



若 $\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=\overline{CD}=4$，則 $\overline{BD}=$ ＿＿（四）＿＿ 。

5. 若 $a_n=\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}$，則 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{20}}=$ ＿＿（五）＿＿ 。(將答案化為最簡形式)

6. 如下圖所示，甲、乙兩個正方形的面積剛好是二次多項式 x^2-7x+4 的兩個根：求剛好包住甲、乙兩個正方形的大正方形之面積為＿＿（六）＿＿ 。



7. 設圓柱形罐頭內擺放兩顆半徑相同的球體，堆在上面的球體的最高點剛好與罐頭的上蓋一樣的高度，如下圖所示。若圓柱形的底面直徑為16，高18，則球體的半徑為＿＿（七）＿＿ 。