台灣省第一區九十九學年度（花蓮高中）
高級中學數學及自然科能力競賽
數學科筆試(一)答案卷

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

【問題一】試證：任何被 8 除餘 7 的正整數都不能寫成 3 個正整數的平方和。

解：

1. 設 $a=8k+7$，且 $a=x^2+y^2+z^2$

   則 $x,\ y,\ z$ 中或全為奇數或有一為奇數，另兩個為偶數

   不妨設 $x=2m+1$，則 $y,\ z$ 同奇或同偶

   (1) y, z 同奇：

   設 $y=2n+1$，$z=2\ell+1$

   則 $a=(2m+1)^2+(2n+1)^2+(2\ell+1)^2$

   $=4\left(m(m+1)+n(n+1)+\ell(\ell+1)\right)+3$

   括號內的每一項都是偶數，因此 a 被 8 除餘 3，矛盾。

   (2) y, z 同偶：

   設 $y=2n$，$z=2\ell$

   則 $a=(2m+1)^2+(2n)^2+(2\ell)^2=4\left(m(m+1)+n^2+\ell^2\right)+1$

   若 n, ℓ 為一奇一偶，則 $m(m+1)+n^2+\ell^2$ 為奇數

   因此 a 被 8 除餘 5，矛盾。

   若 n, ℓ 同為奇或同為偶，則 $m(m+1)+n^2+\ell^2$ 為偶數

因此 a 被 8 除餘 1，矛盾。

【問題二】已知實數 a 與 b 滿足 $a\geq 0, b\geq 0, a+b=1,$ 求 $\dfrac{b}{1+a}+\dfrac{a}{1+b}$ 的最大值與最小值。

解：

利用 $a+b=1$ 及 $\left(a+b\right)^2=1$，即 $a^2+b^2=1-2ab$，可將原式化簡為

$$\frac{b}{1+a}+\frac{a}{1+b}=\frac{\left(a+b\right)+\left(a^2+b^2\right)}{1+\left(a+b\right)+ab}=\frac{2-2ab}{2+ab}=-2+\frac{6}{2+ab}.$$

利用算幾不等式

$$\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}$$

得 $ab\leq\dfrac{1}{4}$，又由 $a\geq 0, b\geq 0$ 知

$$0\leq ab\leq\frac{1}{4},$$

即

$$\frac{8}{3}\leq\frac{6}{2+ab}\leq 3.$$

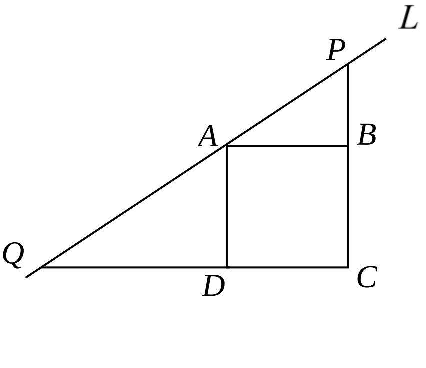
因此

$$\frac{2}{3}=-2+\frac{8}{3}\leq\frac{b}{1+a}+\frac{a}{1+b}\leq -2+3=1.$$

故當 $a=b=\dfrac{1}{2}$ 時，得最小值 $\dfrac{2}{3}$，而當 $a=0, b=1$ 或 $a=1, b=0$ 時，得最大值 1。

【問題三】如下圖，過正方形 $ABCD$ 的頂點 A 任作一直線 L，設 L 與直線 BC 、CD 分別交於 P 、Q 兩點。已知正方形 $ABCD$ 的邊長為 a，試求 $\overline{CP}+\overline{CQ}$ 的最小值。

解：



□CPQ 面積 = □CAP 面積+□CAQ 面積

$$\frac{1}{2}\overline{CQ}\cdot\overline{CP}=\frac{1}{2}\overline{CP}\cdot\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{CQ}\cdot\overline{AD}$$

$$\overline{CQ}\cdot\overline{CP}=a(\overline{CP}+\overline{CQ})$$

因此$\overline{CP}$、$\overline{CQ}$ 是 $x^2-(\overline{CP}+\overline{CQ})x+a(\overline{CP}+\overline{CQ})=0$ 的兩根

$$\therefore(\overline{CP}+\overline{CQ})^2-4a(\overline{CP}+\overline{CQ})\geq 0$$

$$\overline{CP}+\overline{CQ}\geq 4a$$

當 $\overline{CP}=\overline{CQ}=2a$ 時有最小值 $4a$

【問題四】(1)證明 $\cot\frac{\pi}{24}=\dfrac{1+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}$.

(2)求 $\cot\frac{\pi}{24}$ 的精確值(化為最簡形式)。

解：

(1)

$$\cot\frac{\pi}{24}=\frac{\cos\frac{\pi}{24}}{\sin\frac{\pi}{24}}$$

$$=\frac{2\cos^2\frac{\pi}{24}}{2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}}$$

$$=\frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}}$$

$$=\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

(2) 因為

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4},$$

所以 $\cot\frac{\pi}{24}=\dfrac{1+\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}}$

$$=\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{4\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}{6-2}$$

$$=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}.$$