

台灣省第一區九十九學年度（花蓮高中）
高級中學數學及自然科能力競賽
數學科筆試(一)試題

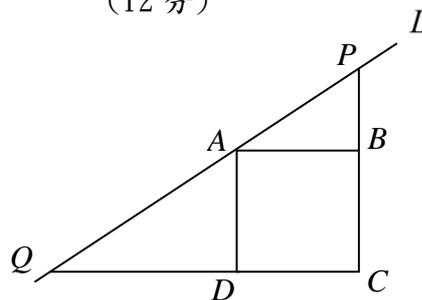
注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

【問題一】試證：任何被 8 除餘 7 的正整數都不能寫成 3 個正整數的平方和。(12 分)

【問題二】已知實數 a 與 b 滿足 $a \geq 0, b \geq 0, a+b=1$, 求 $\frac{b}{1+a} + \frac{a}{1+b}$ 的最大值與最小值。(12 分)

【問題三】如下圖，過正方形 $ABCD$ 的頂點 A 任作一直線 L ，設 L 與直線 BC 、 CD 分別交於 P 、 Q 兩點。已知正方形 $ABCD$ 的邊長為 a ，試求 $\overline{CP} + \overline{CQ}$ 的最小值。(12 分)



【問題四】(1) 證明 $\cot \frac{\pi}{24} = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)}$ 。(5 分)

(2) 求 $\cot \frac{\pi}{24}$ 的精確值(化為最簡形式)。(8 分)