九十九學年度
高級中學數學科能力競賽複賽試題
南區（高雄區）　　　筆試（二）{參考解答}

一、設二直線 $(a+2d)x+(a+2c)y=(a+2d)(a+2c)$ 與 $(b+2d)x+(b+2c)y=(b+2d)(b+2c)$ 的交點在直線 $y=-x$ 上，則 $a+b+2c+2d$ 之值為何？

【參考解答】

a , b 為 $(t+2d)x_0-(t+2c)x_0=(t+2d)(t+2c)$ 方程式之二根

$t^2+2(c+d)t+(2d-2c)x_0=0$

所以 $a+b=-2(c+d)$

故 $a+b+2c+2d=0$

二、設 S 為一個由十個不大於 100 的相異正整數所構成的集合，試證明 S 中必定存在兩個互斥的子集合 S_1 與 S_2 ，而 S_1 中的整數和與 S_2 中的整數和相同。

【參考解答】

S 共有 $2^{10}-1=1023$ 個子集合，每個子集合皆可以求出其中整數的和。

且任意一個子集合的整數和必小於或等於 100+99+…+91=955。

依鴿籠原理可知必定有兩個相異子集合 A_1 與 A_2 的整數和相同，設 $S_1=A_1-A_1\cap A_2$ 與 $S_2=A_2-A_1\cap A_2$。因子集合 A_1 與 A_2 的整數和相同，可知子集合 S_1 與 S_2 的整數和相同，且 S_1 與 S_2 互斥。

三、設 $a=x+\dfrac{1}{x}$ ，試利用 a 來表示 $x^{15}+\dfrac{1}{x^{15}}$ 。

【參考解答】 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=(x+\dfrac{1}{x})^2-2=a^2-2$

$x^4+\dfrac{1}{x^4}=(x^2+\dfrac{1}{x^2})^2-2=(a^2-2)^2-2=a^4-4a^2+2$

$x^8+\dfrac{1}{x^8}=(x^4+\dfrac{1}{x^4})^2-2=(a^4-4a^2+2)^2-2=a^8-8a^6+20a^4-16a^2+2$

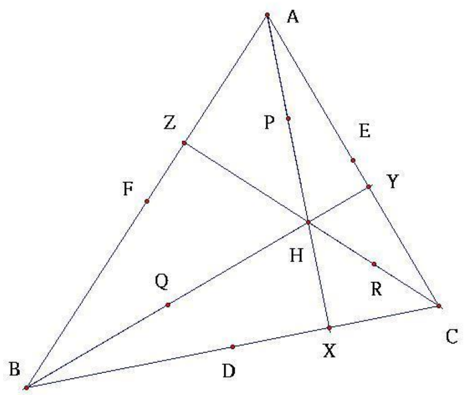
$$x^3+\frac{1}{x^3}=(x^2+\frac{1}{x^2})(x+\frac{1}{x})-(x+\frac{1}{x})=a^3-3a$$

$$x^7+\frac{1}{x^7}=(x^4+\frac{1}{x^4})(x^3+\frac{1}{x^3})-(x+\frac{1}{x})=(a^4-4a^2+2)(a^3-3a)-a=a^7-7a^5+14a^3-7a$$

可得知

$$x^{15}+\frac{1}{x^{15}}=(x^8+\frac{1}{x^8})(x^7+\frac{1}{x^7})-(x+\frac{1}{x})=(a^8-8a^6+20a^4-16a^2+2)(a^7-7a^5+14a^3-7a)-a$$
$$=a^{15}-15a^{13}+90a^{11}-275a^9+450a^7-378a^5+140a^3-15a$$

四、 如右圖，ΔABC 中，D, E, F 為三邊的中點, X, Y, Z 為三高的垂足，H 為垂心，P, Q, R 為連接 H 與 ΔABC 三頂點的線段的中點。試証：$D, E, F, X, Y, Z, P, Q, R$ 九點共圓。



【參考解答】

□$PEDQ$ 中，因為 P, E, D, Q 為中點，所以 $PE // CZ // QD$；

同理，$DE // AB // PQ$；

因為 $CZ \perp AB$，所以 □$PEDQ$ 為長方形。

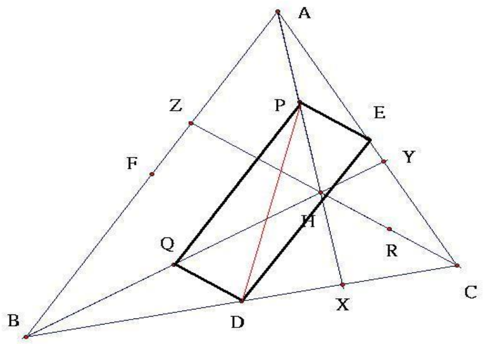
$PEDQ$ 共圓於以 PD 為直徑之圓（$PD = QE$）。

同理, □$PRDF$ 為長方形，□$QFER$ 為長方形。

$PRDF$ 共圓於以 PD 為直徑之圓($PD = RF$),

$QFER$ 共圓於以 QE 為直徑之圓($QE = RF$) 。

因為，PD=$QE = RF$，所以，D, E, F, P, Q, R 六點共圓於以 PD 為直徑之圓。



因為 $PX \perp DX$ （X 為垂足），所以，以 PD 為直徑之圓通過 X 點。

同理，以 PD 為直徑之圓通過 X,Y,Z 點。$D, E, F, P, Q, R, X, Y, X$ 九點共圓。