教育部九十九學年度高級中學數學競賽

嘉義區複賽試題（二）及參考解答

一、求 $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots$ 之值。 (3 分)

【解】

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots$$

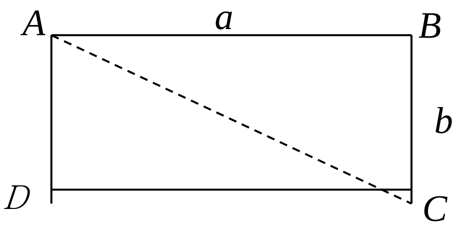
$$+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots$$

$$+\frac{1}{2^3}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$$

$$=2$$

二、如下圖所示，將長與寬分別為 $a,b\ (a>b)$ 的長方形紙張 $ABCD$ 沿著 AC 對摺，求對摺後的 B 點與 D 點的距離。 (3 分)

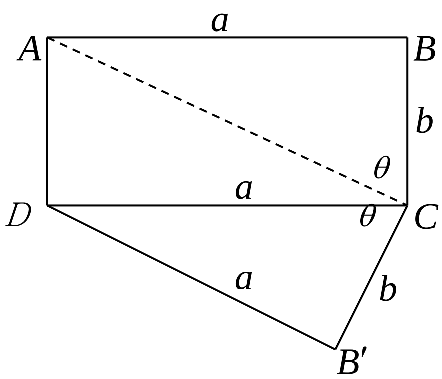


【解】

對摺後 $B\to B'$，求 $\overline{B'D}$。

設 $\angle BCA=\theta$，則 $\angle ACB'=\theta$， $\angle ACD=\frac{\pi}{2}-\theta$

在 $\Delta DCB'$ 中利用餘弦定理，求 $\overline{DB'}$



$$\overline{DB'}^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle DCB'$$

$$=a^2+b^2-2ab\cos(\theta-\frac{\pi}{2}+\theta)$$

$$=a^2+b^2-2ab\sin 2\theta$$

$$=a^2+b^2-4ab\sin\theta\cos\theta$$

$$= a^2 + b^2 - 4ab\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= a^2 + b^2 - \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2}$$

$$\therefore\ \overline{DB'} == \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

三、設 $0 \le x \le \pi$，$0 \le y \le \pi$，且 $x \ne y$。若 $\sin x + \cos y = \sin y + \cos x$，求 $x + y$ 之值。 (3 分)

【解】

由 $\sin x + \cos y = \sin y + \cos x$,

得 $\sin x - \sin y = \cos x - \cos y$

利用和差化積公式：

$$2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

但 $x \ne y$ 且 $0 \le x \le \pi$，$0 \le y \le \pi$，

知 $\sin\frac{x-y}{2} \ne 0 \quad (-\frac{\pi}{2} \le \frac{x-y}{2} \le \frac{\pi}{2})$

因此，$\cos\frac{x+y}{2} = -\sin\frac{x+y}{2}$

即 $\sin\frac{x+y}{2} + \cos\frac{x+y}{2} = 0$

平方得 $\sin(x+y) = -1$

$x + y = \frac{3}{2}\pi \quad (\because\ 0 \le x + y \le 2\pi)$

四、有 4 對夫婦圍圓桌而坐，設 N 表示所有的入坐方法數，M 表示至少有一對夫婦彼此對面而坐的入坐方法數，求 $\frac{M}{N}$ 之值。 (4 分)

【解】

將圓桌編號依序為$1,2,\cdots,8$，因此四對夫妻的入坐方法數為$N=8!$

其中至少有一對夫婦對面而坐的方法數可計算如下：以A_i,B_i，$i=1,2,3,4$，

表示第i對夫婦。利用取捨原理

$M=\#$（至少一對夫婦對面而坐）

$$=\sum_{i=1}^{5}\#(A_i,B_i\text{對面而坐})-\sum_{i<j}\#(A_i,B_i\text{對面而坐且}A_j,B_j\text{對面而坐})$$

$$+\sum_{i<j<k}\#\text{（}(A_i,B_i),(A_j,B_j),(A_k,B_k)\text{皆對面而坐）}-\#(\text{四對夫婦皆對面而坐})$$

$$=C_1^4\cdot P_1^4\cdot 2\cdot 6!-C_2^4\cdot P_2^4\cdot 2^2\cdot 4!-C_4^4\cdot P_4^4\cdot 2^4$$

$$=2^7\cdot 3^3\cdot 5$$

因此 $\dfrac{M}{N}=\dfrac{2^7\cdot 3^3\cdot 5}{8!}=\dfrac{3}{7}$ 。

五、半徑為 1 的球內切於某個正四面體的四個面，求此正四面體的體積。

(4 分)

【解】

球心剛好是四面球體的重心，所以四面體從頂點到底面的高為 4。設邊為x，則面的垂足長為$\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$，從面的頂點到面的重心距離為邊長的$\dfrac{2}{3}$即$\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$。因為底面的點，面的重心與頂點形成垂直三角形。所以$\dfrac{x^2}{3}+16=x^2$即$x^2=24$。所以底面積為$6\sqrt{3}$，正四面體的體積為$\dfrac{1}{3}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 4=8\sqrt{3}$ 。

六、設 $x=\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)^{12}$且$y$表示$\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)^{12}$的小數部分，求$x(1-y)$之值。

(4 分)

【解】

甲、設$a=\sqrt{11}+\sqrt{7}$，$b=\sqrt{11}-\sqrt{7}$

則$a+b=2\sqrt{11}$，$ab=4$

所以$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(2\sqrt{11})^2-2(4)=36$

因此 $a^6+b^6=(a^2)^3+(b^2)^3$

$=(a^2+b^2)(a^4+b^4-a^2 l$

$=(a^2+b^2)\Big[(a^2+b^2)^2-3a^2b\Big]$

$=36\cdot[36^2-3(4)^2]=36\cdot(1296-48)$

$=36\cdot(124$

$a^{12}+b^{12}=(a^6+b^6)-2(ab)^6=N$

其中 N 為自然數

所以 $a^{12}=N-b^{12}$

或 $x=N-b^{12}$ 。

乙、 $b=\sqrt{11}-\sqrt{7}$ ，且 $0<b<1$

所以 $0<b^{12}<1$ ，因此 $(N-1)+(1-b^{12})$

x 的小數部分為 $y=(1-b^{12})$

因此， $x(1-y)=xb^{12}=a^{12}b^{12}=4^{12}$ 。