教育部九十九學年度高級中學數學競賽
嘉義區複賽試題（一）及參考解答

一、若對所有實數 x,y，$3^x+3^{-y}=f(x)+f(y)+g(x)-g(y)$ 恆成立，且 $g(0)=0$，求 $f(x)$ 和 $g(x)$。 (9 分)

【解】

令 $x=y$，由題目的關係式得

$$3^x+3^{-x}=2f(x) \;\Rightarrow\; f(x)=\frac{3^x+3^{-x}}{2}$$

代回原式

$$3^x+3^{-y}=\frac{3^x+3^{-x}}{2}+\frac{3^y+3^{-y}}{2}+g(x)-g(y)$$

整理後可得

$$\frac{3^x-3^{-x}}{2}-g(x)=\frac{3^y-3^{-y}}{2}-g(y)$$

因為 x,y 是任意的實數，所以

$$\frac{3^x-3^{-x}}{2}-g(x)=c,\ c \text{ 為某常數}$$

但 $g(0)=0$，所以此常數為 0，亦即 $g(x)=\dfrac{3^x-3^{-x}}{2}$

故 $f(x)=\dfrac{3^x+3^{-x}}{2}$，$g(x)=\dfrac{3^x-3^{-x}}{2}$.

二、遞迴定義一個數列：$x_{n+1}=x_n(2-\frac{x_n}{10})$，$n=0,1,2,\cdots$。若 $0<x_0<10$，證明：對所有的 $n=0,1,2,\cdots$，$0<x_n<x_{n+1}<10$。 (10 分)

【證】

假設 $0<x_0<\cdots<x_k<10 \;\Rightarrow\; 0<\dfrac{x_k}{10}<1$

$\Rightarrow\; 2-\dfrac{x_k}{10}>1 \qquad x_{k+1}=x_k(2-\dfrac{x_k}{10})>x_k$

而 $\dfrac{x_{k+1}}{10}=\dfrac{x_k}{10}\quad(2-\dfrac{x_k}{10})<\left(\dfrac{\frac{x_k}{10}+2-\frac{x_k}{10}}{2}\right)^2=1$

（$\because$ 等號相等的必要條件是$\dfrac{x_k}{10}=2-\dfrac{x_k}{10}$，即 $x_k=10$，但$x_k<10$）

$\therefore\ x_{k+1}<10$

$\therefore\ 0<x_0<\cdots<x_k<x_{k+1}<10$

由歸納法，得證。

三、找出所有滿足 $x^2+3xy+194(x+y)+97^2=0$ 的整數解(x,y)。 (10 分)

【解】

原方程式等價於

$$-9y=3x+388+\frac{97^2}{3x+194}\text{。}$$

因為x,y為整數，所以$(3x+194)\,|\,97^2$。又因為 97 為質數，所以解得

$x=-65,-97,-3201$，對應的 y 值分別為 1024, 0, 1024。

四、設 O 為平面上的定點，若 A,B,C 為平面上的三點且使得$\overline{AO}=15$，$\overline{BO}=15$，$\overline{CO}=7$，則當ΔABC的面積為最大時，ΔABC的周長為多少？

(10 分)

【解】

O 點必為ΔABC的垂心，否則，$\overline{AO}$不垂直$\overline{BC}$，固定 B,C 讓 A 繞著 O 點轉直到$\overline{AO}$垂直 B,C，則ΔABC的面積變大。所以當ΔABC為最大時，ΔABC為等腰三角形。

O 為其垂心，因ΔFAO相似於ΔFCB，所以$\dfrac{\overline{AF}}{\overline{OF}}=\dfrac{\overline{CF}}{\overline{BF}}=\dfrac{7+\overline{OF}}{\overline{AF}}$

所以$\overline{AF}^2=\overline{OF}^2+7\cdot\overline{OF}$。因$\overline{AF}^2=15^2-\overline{OF}^2$，所以$\overline{OF}=9$，$\overline{AF}=12$，$\overline{AB}=24$，$\overline{BC}=20$，周長為 64。

五、設$a>0,b>0,c>0$且 $abc=1$。證明

(10 分)

$$\frac{1}{a^5(b+c)}+\frac{1}{b^5(c+a)}+\frac{1}{c^5(a+b)}\geq\frac{3}{2}\text{。}$$

【解】

令$x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$, $z=\frac{1}{c}$，則$xyz=\frac{1}{abc}=1$

且$\frac{1}{a^5(b+c)}+\frac{1}{b^5(c+a)}+\frac{1}{c^5(a+b)}=\frac{x^5(yz)}{y+z}+\frac{y^5(xz)}{x+z}+\frac{z^5(xy)}{x+y}$

$$=\frac{x^4}{y+z}+\frac{y^4}{x+z}+\frac{z^4}{x+y}$$

因為 $\left(\frac{x^4}{y+z}+\frac{y^4}{x+z}+\frac{z^4}{x+y}\right)(y+z+x+z+x+y)\geq(x^2+y^2+z^2)^2$

且 $(x^2+y^2+z^2)\geq\frac{1}{3}(x+y+z)^2$，所以

$$\frac{x^4}{y+z}+\frac{y^4}{x+z}+\frac{z^4}{x+y}\geq\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{2(x+y+z)}\geq\frac{1}{18}\frac{(x+y+z)^4}{(x+y+z)}=\frac{1}{18}(x+y+z)^3$$

$$\geq\frac{1}{18}(3\sqrt[3]{xyz})^3=\frac{27}{18}=-\text{。}$$