

教育部九十九學年度高級中學數學競賽

嘉義區複賽試題（一）

（時間二小時）

注意事項：

1. 本試卷共五題**計算證明題**，滿分為四十九分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、若對所有實數 x, y ， $3^x + 3^{-y} = f(x) + f(y) + g(x) - g(y)$ 恆成立，且
(9分)

$g(0) = 0$ ，求 $f(x)$ 和 $g(x)$ 。

二、遞迴定義一個數列： $x_{n+1} = x_n \left(2 - \frac{x_n}{10}\right)$ ， $n = 0, 1, 2, \dots$ 。若 $0 < x_0 < 10$ ，證
(10分)

明：對所有的 $n = 0, 1, 2, \dots$ ， $0 < x_n < x_{n+1} < 10$ 。

三、找出所有滿足 $x^2 + 3xy + 194(x + y) + 97^2 = 0$ 的整數解 (x, y) 。
(10分)

四、設 O 為平面上的定點，若 A, B, C 為平面上的三點且使得 $\overline{AO} = 15$ ，
(10分)

$\overline{BO} = 15$ ， $\overline{CO} = 7$ ，則當 $\triangle ABC$ 的面積為最大時， $\triangle ABC$ 的周長為多少？

五、設 $a > 0, b > 0, c > 0$ 且 $abc = 1$ 。證明

(10分)

$$\frac{1}{a^5(b+c)} + \frac{1}{b^5(c+a)} + \frac{1}{c^5(a+b)} \geq \frac{3}{2}。$$