九十九學年度

高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（屏東區）　　筆試（二）

注意事項：

(1)時間分配：1 小時

(2)本試卷共四題，滿分 21 分。第一題 5 分，第二題 5 分，第三題 5 分，第四題 6 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

一、從 1, 2, 3, …, 200 整數中選取 101 個數，將這 101 個整數寫成 $a_i = 2^{\alpha_i} b_i$ 的形式，其中 b_i 為奇數，例如 $50 = 2^1 \times 25$，$55 = 2^0 \times 55$，$104 = 2^3 \times 13$，試證：

101 個整數之中一定有一個數為另一個數的因數，並說明若只取 100 個數，則不一定有此性質。

二、設數列 $\{a_n\}$ 滿足，$a_1 = 3$ 且 $2a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 4$，$n = 2, 3, 4, ...$

求 $\left[\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{a_i}\right]$ 之值為何？（$[x]$：表不大於 x 的最大整數）

三、設 a, b 為實數，如果方程式 $6x^2 - 24x - 4a = 0$ 和 $x^3 + ax^2 + bx - 8 = 0$ 的根都是非負實數，試求 a, b 的值。

四、如圖，$\overline{AM}$ 是 ΔABC 中 $\overline{BC}$ 邊上的中線，今分別在 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 上任取 D、E 兩點做連線 $\overline{DE}$，交 $\overline{AM}$ 於 N 點。

設 $\alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$，$\beta = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$ 和 $\gamma = \frac{\overline{AN}}{\overline{AM}}$，

試證明 $\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma}{\beta} = 2$