

九十九學年度

高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（屏東區） 筆試（一）

注意事項：

- (1)時間分配：2 小時
- (2)本試卷共四題，滿分 49 分。第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分。
- (3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4)不可使用電算器。
- (5)試題與答案卷一同繳回。

一、若三個兩兩互質的正整數 x, y 和 z (其中 x 是偶數) 滿足 $x^2 + y^2 = z^2$ ，則可以找到一奇一偶

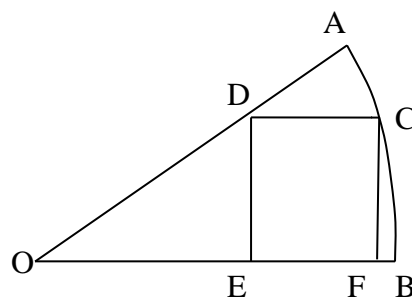
且互質的正整數 s 和 t 使
$$\begin{cases} x = 2st \\ y = s^2 - t^2 \\ z = s^2 + t^2 \end{cases}$$
，試利用這個性質證明 60 為 xyz 的因數。

二、扇形 AOB 中（如圖）， $\overline{OA} = \overline{OB} = 2$ ， $\angle AOB = 30^\circ$ 。

在弧 AB 上取一點 C ，在 \overline{OA} 上取一點 D ，及在

\overline{OB} 上取兩點 E 和 F ，使得 $\overline{CF} \perp \overline{OB}$ ， $\overline{DE} \perp \overline{OB}$ ，

求此長方形 $CDEF$ 之最大面積為何？



三、設 α ， β 和 γ 皆為複數且滿足方程組

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 6 \\ \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 = 0 \end{cases}$$

試求 $\frac{7\alpha^{2010} - 12\gamma^{2004}}{5\beta^{2016}}$ 之值。

四、設 a, b, c 是正實數且滿足 $1 = ab + bc + ca + 2abc$ ，試證：

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{2abc} \geq 16$$

並求等號成立時 a, b, c 分別是多少？