九十八學年度台灣省第五區(台中區)

高級中學數理及資訊學科能力競賽

（數學科筆試二參考解答）

一、 $(1.1)^2+(1.2)^2+(1.3)^2+\cdots+(3.1)^2$

$$=\frac{1}{100}\times(\ 1^2\ 1 \qquad 1^2\cdot 2\cdot +$$

$$=\frac{1}{100}\times(\frac{3\times 1 \quad \times 3\ \ 2}{6}-\frac{6\times 3\ \ \times 1\ \ 0}{6})$$

$$=\frac{1}{1\ 0\ 0}\times\frac{2\ \ 1}{6}(\times 3\ \ 1\ \times 3\ \ 2\times\ \ 3\cdot$$

$=1\ 0\ 0$ 。

二、由 $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

$$=1+2x(y+yz+z$$

知 $xy+yz+zx$ 有最小值時，$(x+y+z)^2$ 亦得最小值；反之亦然。

因為 $(x+y+z)^2$ 的最小值發生在 $x+y+z=0$，此時 $xy+yz+zx=-\frac{1}{2}$，故

$xy+yz+zx$ 的最小值為 $-\frac{1}{2}$ 。

三、設 $M(3,3,0)$ 為 $\overline{BD}$ 中點，此題即在 $\overline{BC}$ 上取一點 M_1，使得 $\Delta BMM_1=\frac{1}{3}\Delta BDC$ 。

設 $M_2\in\overline{BD}$ 且 $\overline{BM_2}:\overline{M_2D}=1:2$，即由分點公式可知

$$M_2(\frac{8}{3},\frac{1}{3}\ 0,$$

過 M_2 作一平行 $\overline{MC}$ 的直線，交 $\overline{BC}$ 於一點 M_1，此 M_1 為所求

$\because$ $M_1\in\overline{BC}$，設 M_1 （$t, 2t, 0$）

$\because\ \overline{M_1M_2}\,//\,\overline{MC} \Rightarrow \dfrac{t-\frac{8}{3}}{1}=\dfrac{2t-\frac{10}{3}}{1} \Rightarrow t=\dfrac{2}{3}.$

$\therefore\ M_1(\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3},0)$

$\because\ \overleftrightarrow{AM}:\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$ ， i.e. $\overleftrightarrow{AM}:\begin{cases} x-y=0 \\ x+3z-3=0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ 過 $\overleftrightarrow{AM}$ 的平面 E 可設為

$$x-y+\alpha(x+3z-3)$$

平面 E 包含直線 $\overleftrightarrow{AM}$ 且過 $M_1(\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3},0)$ ，代入上式可得 $\alpha=-\dfrac{2}{7}$

$\therefore\ E:5x-7y-6z+6=0$ 。

四、$\because\ \dfrac{1}{2^{\left[\sqrt{a^2}\right]}}$， $\dfrac{1}{2^{\left[\sqrt{a^2+1}\right]}}$， $\cdots$， $\dfrac{1}{2^{\left[\sqrt{a^2+2a}\right]}}$ 的值均為 $\dfrac{1}{2^a}$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\left[\sqrt{n}\right]}}=\frac{3}{2^1}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\cdots$

令 $\quad s=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2^2}+\dfrac{7}{2^3}+\dfrac{9}{2^4}+\cdots \qquad (1)$

$\quad\Rightarrow \dfrac{s}{2}=\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\dfrac{7}{2^4}+\cdots \qquad (2)$

$\Rightarrow \dfrac{s}{2}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{2}{2^3}+\dfrac{2}{2^4}+\cdots$

$$=\frac{3}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$$

$\therefore\ s=5$ 。

五、將 $x^2(\cos\alpha+i\sin\alpha)+y^2(\cos\beta+i\sin\beta)+iz=0$

除以 i 得到

$$x^2(-i\cos\alpha+\sin\alpha)+y^2(-i\cos\beta+\sin\beta)+z=0$$

又 $x^2+y^2+z=0$

將兩式相減得

$$[(1-\sin\alpha)+i\cos\alpha]x^2+[(1-\sin\beta)+i\cos\beta]\ y^2$$

$$=\left[(1-\sin\alpha)x^2+(1-\sin\beta)y^2\right]+i\left[x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta\right]$$

$\because$ $x^2>0$, $y^2>0$ 且 $1-\sin\alpha\le 0$, $1-\sin\beta\le 0$，所以

$1-\sin\alpha$ 及 $1-\sin\beta$ 皆需為 0

此時 $\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore$ $\alpha+\beta=\pi$ 。

六、所求的事件的機率為

$$\sum_{k=0}^{3}P(k\text{ 隻停在漏電的電線桿且 }5-k\text{ 隻停在另 2 根不漏電的電線桿）}$$

$$=\sum_{k=0}^{3}C_k^5\cdot(\frac{2}{5})^k\cdot C_2^3\cdot[(\frac{2}{5})^{5-k}-2\cdot(\frac{1}{5})^{5-k}]$$

$$=\sum_{k=0}^{3}C_k^5\cdot C_2^3(\frac{2}{5})^5-\sum_{k=0}^{3}C_k^5\cdot C_2^3\,\frac{2^{k+1}}{5^5}$$

$$=78\cdot(\frac{2}{5})^5-786\cdot(\frac{1}{5})^5$$

$$=\frac{342}{625}\ 。$$