

九十八學年度台灣省第五區(台中區)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(二) 試題

編號：_____ (學生自填)

(時間一小時)

注意事項：

1. 本試卷共六題填充題，滿分為二十一分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、求 $(1.1)^2 + (1.2)^2 + (1.3)^2 + \cdots + (3.1)^2$ 。(3分)

二、設 x, y, z 為實數且滿足 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ，求 $xy + yz + zx$ 的最小值。(3分)

三、空間中一四面體的四個頂點分別為 $A(0, 0, 1)$, $B(2, 4, 0)$, $C(0, 0, 0)$, $D(4, 2, 0)$ ，平面 E 通過 A 點與 \overline{BD} 中點且與 \overline{BC} 有交點。若平面 E 將此四面體分成兩塊，其中一塊的體積為原四面體的 $\frac{1}{3}$ ，求 E 的方程式。(3分)

四、求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}$ ，其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示小於或等於 x 的最大整數，例如 $\lfloor 1.2 \rfloor = 1$ 。

(4分)

五、設 x, y, z 為實數且皆不為 0， $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ， $-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ 。若

$x^2 + y^2 + z = 0$, $x^2(\cos \alpha + i \sin \alpha) + y^2(\cos \beta + i \sin \beta) + iz = 0$, 其中 $i = \sqrt{-1}$, 求 $\alpha + \beta$ 。(4 分)

六、假設有 5 根電線桿，其中有 2 根會漏電，以致於停在它們上面的小鳥會立刻被電昏而摔落地面。今有 5 隻小鳥各自獨立的隨機選擇其中一根電線桿逗留休息，試計算只有 2 根電線桿上有小鳥的機率。
(4 分)