九十八學年度台灣省第五區(台中區)

高級中學數理及資訊學科能力競賽

（數學科筆試一參考解答）

一、 過 C 作 $HI//FG$，與 AF, AG 分別交 I 和 H，連結 BE, BH。因 $\angle BEH = 90^\circ$, $\angle BCH = 90^\circ$，所以四邊形 $CBEH$ 是圓內接四邊形

$\angle BEG = \angle B$

而

$\angle BED = \angle B$

$\therefore \angle BHI = \angle BAD$

由此可知，B, H, A, I 共圓

$\therefore \overline{CI} \cdot \overline{CH} = \overline{AC}$ (1)

$\because \Delta ACI \propto \Delta AE$

$\overline{AC} : \overline{AB} = \overline{CI} : \overline{BF}$

又 $\Delta ACH \propto \Delta ABG$

$\therefore \overline{AC} : \overline{AB} = \overline{CH} : \overline{BG}$

$\therefore \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 = \overline{CI} \cdot \overline{CH} : \overline{BF} \cdot \overline{BG}$ (2)

由(1), (2), $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{CB} : \overline{BF} \cdot \overline{BG}$

$$\frac{\overline{AC} \cdot \overline{CB}}{\overline{BF} \cdot \overline{BG}} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}, \quad BF \cdot BG = \frac{(\overline{AB}^2)(\overline{AC} \cdot \overline{CB})}{\overline{AC}^2} = \frac{4^2 \cdot 3 \cdot 1}{3^2} = \frac{16}{3}.$$

二、 令 $f(x) = x^3 - \pi x^2 - \sqrt{2}x - 1$

則 $f(0) = -1$, $f(100) > 0$

由堪根定理，0 與 100 之間有一個根 r

令 $f(x) = (x-r)(x^2 + ax + b)$

$$= x^3 + (a-r)x^2 + (b-ra)x - rb$$

得 $a - r = -\pi$

$b - ra = \sqrt{2}$ (1)

$rb = 1$ (2)

由(2) $b > 0$

由(1) $a = \dfrac{b+\sqrt{2}}{r} > 0$

$\therefore a, b$ 皆為正數 $\therefore x^2 + ax + b > 0$ for $x \ge 0$

$\therefore f(x)$ 沒有第二個正根。

三、 7 是 2009 的因數，我們觀察立方數被 7 除的餘數為 $0, 1, -1$。而 x^3, y^3, z^3 被 7 除的餘數相加要等於 0，必分別為 $0+0+0$ 或 $0+1-1$。也就是說 x, y, z 必有一數為 7 之倍數。設 z 為 7 的倍數，因 $z > 0$ 且 $14^3 > 2009$，我們有 $z = 7$。故 $x^3 + y^3 = 2009 - 7^3 = 1666$。設 $x \ge y$，因 $2 \times 9^3 < 1666$，$x = 10$ 或 11（$12^3 = 1728$）而相應 $y^3 = 666$ 或 335，二數皆非立方數。因此不存在正整數 x, y, z 滿足 $x^3 + y^3 + z^3 = 2009$。

四、 對 n 作數學歸納法。當 $n = 1$ 時結論顯然成立。

設經過若干次操作後，n 張卡片中的 1 號卡片在最上面。則當有 $n+1$ 張卡片時：

(1) 標 $n+1$ 的卡片在最上面，或經過若干次操作後標 $n+1$ 的卡片在最上面。則下一次操作時標 $n+1$ 的卡片會在最下面。因此對前 n 張卡片由歸納假設，可知經過若干次操作後 1 的卡片會在最上面。

(2) 標 $n+1$ 的卡片永遠不會出現在最上面。因此最下面的卡片永遠不會動。將標 $n+1$ 的卡片與這張卡片對調，不影響操作(因為兩張卡片都永遠不會出現在最上面)。於是對調後對前 n 張卡片由歸納假設，可知經過若干次操作後 1 的卡片會在最上面。

由(1)(2)及數學歸納法得證。