

台北市九十八學年度
 高級中學數理及資訊學科能力競賽
 數學科筆試（一）試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

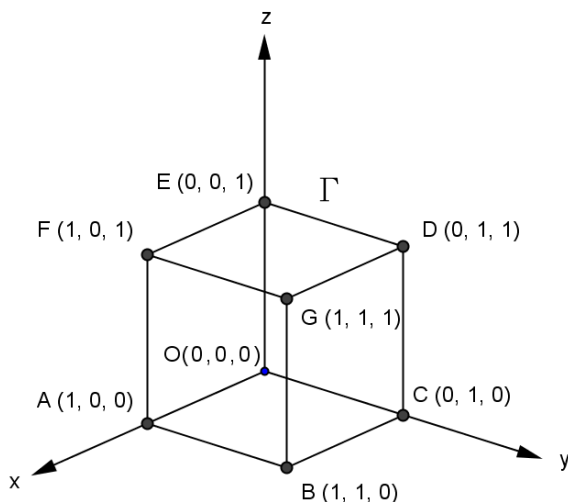
1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一： 設 $a_n = 8^n + 9^n + 10^n$ ， $n = 1, 2, \dots$ ，試求 a_{99} 除以 729 的餘數。 (12 分)

問題二： 令 r_n 為 $1 + 2 + \dots + n$ 除以 10 的餘數， $n = 1, 2, \dots$ ，試求 $\sum_{k=1}^{2009} r_k = r_1 + \dots + r_{2009}$ 之值。 (12 分)

問題三： 設 Γ 為空間中之一立方體(如下圖)，平面 α 之方程式為 $5x + 2y - z = k$ 。

- (1) 若立方體 Γ 被平面 α 截出一個四面體，且此四面體包含 E 點，則 k 之範圍為何？ (6 分)
- (2) 當 k 滿足(1)之條件時，求立方體 Γ 被平面 α 截成之截面面積（以 k 表示）。 (6 分)



問題四： 在下圖的 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， \overline{EF} 垂直 \overline{AC} 於 F 。若 $\angle ABD = \angle BAD = \angle ADE$ ，試證：
 \overline{EF} 垂直 \overline{AB} 於 F 。若 $\angle ABD = \angle BAD = \angle ADE$ ，試證：
 \overline{EF} 垂直 \overline{AB} 於 F 。若 $\angle ABD = \angle BAD = \angle ADE$ ，試證：

- (1) 若 $\angle BAC = 36^\circ$ ，則 $\overline{AB} = 2\overline{CF}$ 。 (6分)
- (2) 若 $\overline{AB} = 2\overline{CF}$ ，則 $\angle BAC = 36^\circ$ 。 (7分)