九十八學年度台灣省第七區(台南區)

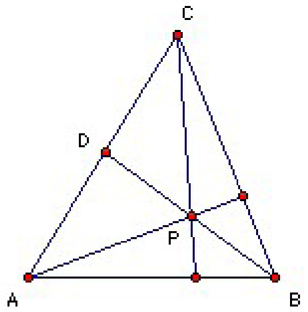
高級中學數理及資訊學科能力競賽

(數學科筆試二參考解答)

1. 如圖，$\because \dfrac{\Delta APD}{\Delta CPD}=\dfrac{\Delta ABD}{\Delta CBD}=\dfrac{\Delta A}{\Delta C}.$ $\therefore \dfrac{\Delta APD}{84}=\dfrac{70}{35+\Delta CPE}$ 。

. 同理可得 $\dfrac{\Delta CPE}{35}=\dfrac{\Delta APD+84}{70}$ 。

解得 $\Delta APD=56$ ， $\Delta CPE=70$.，故 $\Delta ABC=315$ 。



2. $\because \dfrac{1}{\sqrt{3}}<\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\therefore$ $\dfrac{1}{x}$ 的小數部分就是 $\dfrac{1}{x}$

得 $x^2-2=\dfrac{1}{x} \Rightarrow x^3-2x-1=0 \Rightarrow (x+1)(x^2-x-1)=0$

$\therefore x^2=x+1 \Rightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$x^4=2+3x$ ，$x^8=13+21x$ ，$x^{12}=89+144x$ ，故 $x^{12}-\dfrac{144}{x}=233$ 。

3. 利用餘弦定理，令 $\overline{PB}=x,$ 則

$$\overline{AC}^2=\overline{AP}^2+\overline{CP}^2-2\overline{AP}\times\overline{CP}\times\cos 120^\circ=64+36+48=148$$

$$\overline{BC}^2=\overline{BP}^2+\overline{CP}^2-2\overline{BP}\times\overline{CP}\times\cos 120^\circ=x^2+36+6x$$

$$\overline{AB}^2=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2-2\overline{AP}\times\overline{BP}\times\cos 120^\circ=64+x^2+8x$$

又由勾股定理知，$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{CB}^2$

$\Rightarrow x^2+8x+64=148+x^2+6x+36 \Rightarrow 2x=120 \Rightarrow x=60$ 。

$\therefore \overline{BP}=60$

4. 令 $G(x)=F(x)-5$，依題意知 $G(x)$ 有四個相異的整數根 a,b,c,d，

$\therefore G(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)H(x)$，其中 $H(x)$ 為整係數多項式。假設存在整數 k 滿足 $F(k)=8$，則 $G(k)=F(k)-5=8-5=3$，即

$$(k-a)(k-b)(k-c)(k-d)H(k)=3。$$

表示此四個相異整數 $k-a,k-b,k-c,k-d$ 中至多只有一個能等於 ± 3，其餘三個必定為 ± 1。 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ 中至少有兩個相等，與已知矛盾。

5. 分別求得（1）$\sum_{i=0}^{n-1}\sin(\theta+\frac{2i\pi}{n})=0$ 和（2）$\sum_{i=0}^{n-1}\cos(\theta+\frac{2i\pi}{n})=0$，故得解為 0

提示1 : $2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$

設 $p=\sin\theta+\sin(\theta+\frac{2\pi}{n})+\sin(\theta+\frac{4\pi}{n})+\cdots+\sin(\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n})$

$2p\sin\frac{\pi}{n}=2\sin\theta\sin\frac{\pi}{n}+2\sin(\theta+\frac{2\pi}{n})\sin\frac{\pi}{n}+2\sin(\theta+\frac{4\pi}{n})\sin\frac{\pi}{n}+\cdots+2\sin(\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n})\sin\frac{\pi}{n}$

$=(\cos(\theta-\frac{\pi}{n})-\cos(\theta+\frac{\pi}{n}))+(\cos(\theta+\frac{\pi}{n})-\cos(\theta+\frac{3\pi}{n}))+(\cos(\theta+\frac{3\pi}{n})-\cos(\theta+\frac{5\pi}{n}))+\cdots$

$\quad+(\cos(\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n}-\frac{\pi}{n})-\cos(\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n}+\frac{\pi}{n}))$

$=\cos(\theta-\frac{\pi}{n})-\cos(2\pi+\theta-\frac{\pi}{n})$

$=\cos(\theta-\frac{\pi}{n})-\cos(\theta-\frac{\pi}{n})$

$=0$

提示2 : $2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$

設 $q=\cos\theta+\cos(\theta+\frac{2\pi}{n})+\cos(\theta+\frac{4\pi}{n})+\cdots+\cos(\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n})$

$2q\sin\frac{\pi}{n}=2\cos\theta\sin\frac{\pi}{n}+2\cos(\theta+\frac{2\pi}{n})\sin\frac{\pi}{n}+2\cos(\theta+\frac{4\pi}{n})\sin\frac{\pi}{n}+\cdots+2\cos(\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n})\sin\frac{\pi}{n}$

$=(\sin(\theta+\frac{\pi}{n})-\sin(\theta-\frac{\pi}{n}))+(\sin(\theta+\frac{3\pi}{n})-\sin(\theta+\frac{\pi}{n}))+(\sin(\theta+\frac{5\pi}{n})-\sin(\theta+\frac{3\pi}{n}))+\cdots$

$\quad+(\sin(\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n}+\frac{\pi}{n})-\sin(\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n}-\frac{\pi}{n}))$

$=\sin(2\pi+\theta-\frac{\pi}{n})-\sin(\theta-\frac{\pi}{n})$

$=\sin(\theta-\frac{\pi}{n})-\sin(\theta-\frac{\pi}{n})$

$=0$