

九十八學年度台灣省第七區(台南區)
高級中學數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試(一) 試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

- (1) 作答時間：2小時。不可使用電算器。
- (2) 本試卷共五題，滿分49分。每題配分標於題末。計算、證明題請務必依序寫在答案卷上。同時必須寫出演算過程或理由。
- (3) 試題紙與答案卷請一併繳回。

1. 已知在直角坐標平面，過點 $(1,2)$ 之直線交雙曲線 $xy=1$ 於 P 、 Q 兩點，求線段 \overline{PQ} 長度之最小值。(9分)

2. 設 n 為正整數，如果恰有一正整數 k 滿足不等式 $\frac{9}{17} < \frac{n}{n+k} < \frac{8}{15}$ ，試求滿足上述條件 n 的最大值。(10分)

3. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 2\angle ACB$ ，

試證：(1) $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AB} \cdot \overline{BC}$ ；

(2) $\overline{AB} + \overline{BC} < 2\overline{AC}$ 。(10分)

4. 已知一無窮多項的整數數列：10001，100010001，1000100010001， \dots ，對任何一個正整數 n 而言，其第 n 項為 $1+10^4+\dots+10^{4n}$ 。
證明：在該數列中沒有任何一項是質數。(10分)

5. 若 p 和 q 均為自然數，並且

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1358} + \frac{1}{1359}$$

求： $(p+1)^{2009}$ 除以 2039 的餘數，並請證明你的答案。(10分)