

九十八學年度台灣省第四區(新竹高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試(一) 試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一：(1) 試證：若整數 a, b 滿足 $a^2 - b^2$ 為偶數，則 $a^2 - b^2$ 為 4 的倍數。 (4 分)

(2) 設 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 是一整係數多項式，其中 a 為奇數。試證： $\sqrt{f(1)}, \sqrt{f(2)}, \sqrt{f(3)}, \sqrt{f(4)}$ 四數之中至少有一數不是有理數。 (12 分)

問題二：設 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心，且 D, E, F 三點分別為 $\triangle ABH, \triangle BCH$ 與 $\triangle CAH$ 的外心。

(1) 試證： H 為 $\triangle DEF$ 的外心。 (10 分)

(2) 試證： $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 全等。 (6 分)

問題三：(1) 試證：若 $-\frac{\pi}{2} < x < y < \frac{\pi}{2}$ ，則 $\tan x < \tan y$ 。 (5 分)

(2) 試求最小的正整數 n ，使得任意 n 個相異實數中，一定

存在兩數 x, y 滿足 $0 < \frac{3x - 3y}{1 + xy} < \sqrt{3}$ 。 (12 分)