九十八學年度台灣省第二區(新店高中)

高級中學數理及資訊學科能力競賽

（數學科筆試一參考答案）

問題一：

由(1)得到 $z = x + 2y \quad \cdots \quad (4)$。

將(4)代入(2)，則有 $x^2 - 4y^2 + (x+2y)^2 = 32 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2xy = 16 \quad \cdots \quad (5)$。

亦將(4)代入(3)，則有

$2y(x+2y) - 3(x+2y)x + 4xy = 24 \quad \Rightarrow \quad -3x^2 + 4y^2 = 24 \quad \cdots \quad (6)$。

現在考慮 $\begin{cases} x^2 + 2xy = 16 \quad \cdots\cdots & (5) \\ -3x^2 + 4y^2 = 24 \quad \cdots\cdots & (6) \end{cases}$，將 $(5)\times 3 - (6)\times 2$ 可得到

$9x^2 + 6xy - 8y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (3x-2y)(3x+4y) = 0$

所以，$y = \frac{3}{2}x$ 或 $y = -\frac{3}{4}x$。

當 $y = \frac{3}{2}x$ 時，解 $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x \\ x^2 + 2xy = 16 \end{cases}$。求得 $(x, y) = (2,3), (-2,-3)$，並依此求出 z。

故有 $(x, y, z) = (2,3,8), (-2,-3,-8)$。

當 $y = -\frac{3}{4}x$ 時，解 $\begin{cases} y = -\frac{3}{4}x \\ x^2 + 2xy = 16 \end{cases}$。求得 $(x, y) = (4\sqrt{2}i, -3\sqrt{2}i), (-4\sqrt{2}i, 3\sqrt{2}i$ ，

並依此求出 z。故有 $(x, y, z) = (4\sqrt{2}i, -3\sqrt{2}i, -2\sqrt{2}i), (-4\sqrt{2}i, 3\sqrt{2}i, 2\sqrt{2}i)$。

問題二：

因 $\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c}$

$= 1\cdot\sqrt{1-a} + 1\cdot\sqrt{1-b} + 1\cdot\sqrt{1-c}$

$\le \sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{(1-a)+(1-b)+(1-c))}$

$= \sqrt{3(3-a-b-c)} = \sqrt{6}$ ....(*)

且 $\left(\frac{1}{\sqrt{1-a}} + \frac{4}{\sqrt{1-b}} + \frac{9}{\sqrt{1-c}}\right)\cdot(\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c})$

$$\geq \left(\sqrt[4]{1-a} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{1-a}} + \sqrt[4]{1-b} \cdot \frac{2}{\sqrt[4]{1-b}} + \sqrt[4]{1-c} \cdot \frac{3}{\sqrt[4]{1-c}} \right)^2$$

$$\geq (1+2+3)^2 = \text{………………………………………}(**)$$

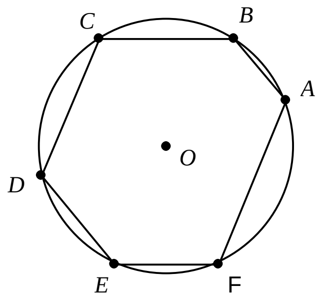
故知

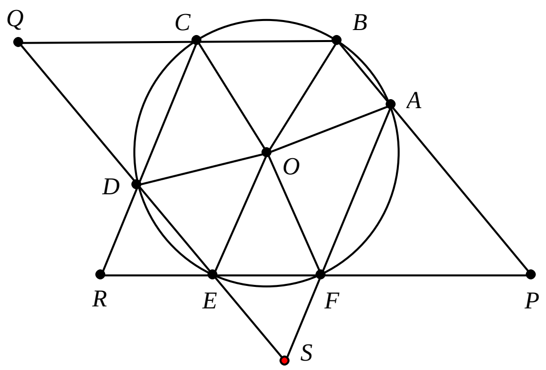
$$\frac{1}{\sqrt{1-a}} + \frac{4}{\sqrt{1-b}} + \frac{9}{\sqrt{1-c}}$$

$$\geq \frac{36}{\sqrt{1-a}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-c}}$$

$$\geq \frac{36}{\sqrt{6}} = 6\sqrt{6}$$

問題三：





因為△OAB、△OBC、△OCD、△ODE、△OEF 與△OFA 都是等腰三角形，

令

$$\angle OAB = \angle 1, \quad \angle OBC = \angle 2, \quad \angle OCD = \angle 3,$$

$$\angle ODE = \angle 4, \quad \angle OEF = \angle 5, \quad \angle OFA = \angle 6,$$

則得

$$2\angle 1 + 2\angle 2 + 2\angle 3 + 2\angle 4 + 2\angle 5 + 2\angle 6 = 720^\circ,$$

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 360^\circ。 \qquad (*)$$

設直線 AB 與直線 EF 相交於 P、直線 BC 與直線 DE 相交於 Q，則 $PBQE$ 是平行四邊形。於是，得 $\angle PBQ = \angle QEP$ ，或寫成

$$\angle 1 + \angle 2 = \angle 4 + \angle 5。 \qquad (**)$$

設直線 CD 與直線 EF 相交於 R、直線 DE 與直線 FA 相交於 S，則在△DER 中，依(**)式與(*)式可得

$$\angle DRE = 180^{\div} - \angle EDR - \angle DER = 180^{\div} - (180^{\div} - \angle EDC) - (180^{\div} - \angle DEF)$$

$$= \angle EDC + \angle DEF - 180^{\div} = (\angle 3 + \angle 4) + (\angle 4 + \angle 5) - 180^{\div}$$

$$= (\angle 3 + \angle 4) + (\angle 1 + \angle 2) - 180^{\div} = (360^{\div} - \angle 5 - \angle 6) - 180^{\div}$$

$$= 180^{\div} - \angle 5 - \angle 6$$ 。

另一方面，在△EFS 中，可得

$$\angle EFS = 180^{\div} - \angle EFA = 180^{\div} - \angle 5 - \angle 6 = \angle DRE$$ ，或

$$\angle DRF = \angle RFS$$ 。

因為直線 EF 截直線 CD 與直線 FA 的內錯角相等，所以，$\overline{CD}$與$\overline{FA}$平行。