

九十八學年度台灣省第一區(花蓮高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試(一) 試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

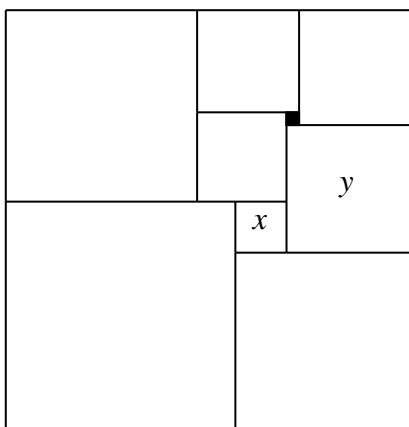
1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程依序填寫在答案卷內。

問題一：設 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{51} - \frac{1}{52} = \frac{q}{p}$ ，其中 p, q 為互質的正整數。

試證： q 可被 79 整除。

(12 分)

問題二：將九塊大小不等的正方形拼成一塊長方形，如下圖所示：



其中黑色正方形的邊長為 1，而 x 與 y 代表所在正方形的邊長。

- (1) 求 x 與 y 的值。
- (2) 求長方形的長與寬。

(12 分)

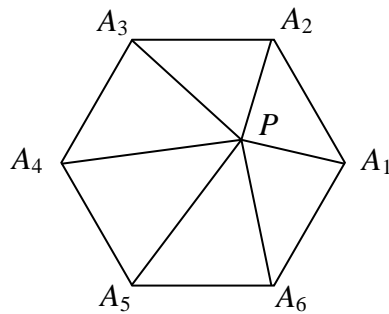
問題三：在直角三角形 ABC 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = c$ ， $\overline{BC} = a$ ， $\overline{CA} = b$ ，試証：

(1) $c < a + b \leq \sqrt{2}c$.

(2) $a + b = \sqrt{2}c$ 的充要條件為 $a = b$.

(12 分)

問題四：設 P 是邊長為 2 的正六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 內部之一點，如下圖所示：



證明：三角形 PA_1A_2 ， PA_3A_4 與 PA_5A_6 的面積和與三角形 PA_6A_1 ， PA_2A_3 與 PA_4A_5 的面積和一樣。

(13 分)