高雄市九十八學年度

高級中學數理及資訊學科能力競賽

（數學科筆試一參考解答）

［問題一］：

$2^a+2^b+2^c+2^d=10.625$

$\Rightarrow 2^{a+3}+2^{b+3}+2^{c+3}+2^{d+3}=85$ （1）

（1）$\Rightarrow d+3=0$ 即 $d=-3$ （2）

（1）（2）$\Rightarrow 2^{a+3}+2^{b+3}+2^{c+3}=84 \Rightarrow 2^{a+1}+2^{b+1}+2^{c+1}=21$ （3）

（3）$\Rightarrow c+1=0$ 即 $c=-1$ （4）

（3）（4）$\Rightarrow 2^{a+1}+2^{b+1}=20$ （5）

（5）$\Rightarrow 2^{a-2}+2^{b-2}=5$ （6）

（6）$\Rightarrow b-2=0$ 即 $b=2$ （7）

（6）（7）$\Rightarrow 2^{a-2}=4 \Rightarrow a-2=2$ 即 $a=4$

故整數解 $(a,b,c,d)=(-3,-1,2,4)$ 。

［問題二］：

設 ΔABC 的三邊長分別為 $a,b,c,$ 由題意知 $a+b+c=9 \Rightarrow b+c=9-a$

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos 60^\circ=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc$

$\Rightarrow \quad bc=27-6a$

設 b 、c 為二次方程式 $x^2-(9-a)x+(27-6a)=0$ 之兩根，

$\because$ 兩根皆為正

$\therefore \begin{cases} 9-a>0 \\ 27-6a>0 \\ (9-a)^2-4(27-6a)\ge 0 \end{cases}$ 且 $a>0 \Rightarrow \quad 3\le a<\dfrac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad bc\le 9$

ΔABC 面積 $\Delta=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc\le \dfrac{9}{4}\sqrt{3}$ ，故 ΔABC 面積的最大值為 $\dfrac{9}{4}\sqrt{3}$ 。

［問題三］：$\begin{cases} \log_{10}(2000xy)=4+\log_{10}x\cdot\log_{10}y \text{........(1)} \\ \log_{10}(2yz)=1+\log_{10}y\cdot\log_{10}z \text{................(2)} \\ \log_{10}(zx)=\log_{10}z\cdot\log_{10}x \text{........................(3)} \end{cases}$

$\because \log_{10}(2000xy)=3+\log_{10}(2xy)$

分別代入(1)，(2)，得 $\log_{10} x - \log_{10} z - \log_{10} x \log_{10} y + \log_{10} y \log_{10} z = 0$

整理、分解因式 $\rightarrow$ $(1-\log_{10} y)\cdot(\log_{10} x - \log_{10} z) = 0$

解得 $y = 10$ (不合) 或 $x = z$

將 $x = z$ 代入(3)式，解得 $x = 1$ 或 $x = 100$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \\ z = 1 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = 100 \\ y = 20 \\ z = 100 \end{cases} \quad \therefore x + y + z = 7 \text{ 或 } x + y + z = 220$$

［問題四］： $\sqrt{a_n a_{n-2}} - \sqrt{a_{n-1} a_{n-2}} = 2a_{n-1} \Rightarrow \sqrt{a_{n-2}}(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}) = 2a_{n-1}$

$$\Rightarrow \sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}} = \frac{2a_{n-1}}{\sqrt{a_{n-2}}} \Rightarrow \sqrt{a_n} = \frac{2a_{n-1}}{\sqrt{a_{n-2}}} + \sqrt{a_{n-1}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a_n} = \sqrt{a_{n-1}}\left(\frac{2\sqrt{a_{n-1}}}{\sqrt{a_{n-2}}} + 1\right) \Rightarrow a_n = a_{n-1}\left(\frac{2\sqrt{a_{n-1}}}{\sqrt{a_{n-2}}} + 1\right)^2$$

$$\Rightarrow a_3 = a_2\left(\frac{2\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}} + 1\right)^2 = 1\times 3^2 = (1\times 3)^2 = [(2-1)(2^2-1)]^2$$

$$a_4 = a_3\left(\frac{2\sqrt{a_3}}{\sqrt{a_2}} + 1\right)^2 = (1\times 3)^2 \times \left(\frac{2\times 3}{1} + 1\right)^2 = (1\times 3\times 7)^2 = [(2-1)(2^2-1)(2^3-1)]^2$$

依此類推

$$\Rightarrow a_n = [1\times 3\times 7\times\cdots\times(2^{n-1}-1)]^2 = [(2-1)(2^2-1)(2^3-1)\cdots(2^{n-1}-1)]^2$$

得知 $\Rightarrow a_n = [(2-1)(2^2-1)(2^3-1)\cdots(2^{n-1}-1)]^2$

［問題五］：

$1 = ab + bc + ca + 2abc$

$\Leftrightarrow 3 = ab + bc + ca + 2abc + 2$

$\Leftrightarrow 3 + ab + bc + ca + 2(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}) = 2abc + 2(ab + bc + ca) + 2(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}) + 2$

$\Leftrightarrow (\mathrm{b}+1)(\mathrm{c}+1) + (\mathrm{c}+1)(\mathrm{a}+1) + (\mathrm{a}+1)(\mathrm{b}+1) = 2(\mathrm{a}+1)(\mathrm{b}+1)(\mathrm{c}+1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} + \dfrac{1}{c+1} = 2$

設 x, y 皆為正實數，則由算幾不等式，得 $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \geq \dfrac{4}{x+y}$，且當 $x = y$ 時等號成立。

$$\Rightarrow \frac{1}{3}+\frac{1}{4a+1}\geq\frac{1}{a+1},\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{4b+1}\geq\frac{1}{b+1},\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{4c+1}\geq\frac{1}{c+1}$$

將三式相加，可得：

$$1+\frac{1}{4a+1}+\frac{1}{4b+1}+\frac{1}{4c+1}\geq\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4a+1}+\frac{1}{4b+1}+\frac{1}{4c+1}\geq 1 \qquad (\because \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2)$$

$$\Leftrightarrow (4b+1)(4c+1)+(4c+1)(4a+1)+(4a+1)(4b+1)\geq(4a+1)(4b+1)(4c+1)$$

$$\Leftrightarrow 16(ab+bc+ca)+8(a+b+c)+3\geq 64abc+16(ab+bc+ca)+4(a+b+c)+1$$

$$\Leftrightarrow 4(a+b+c)+2\geq 64abc$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b+c)+1\geq 32abc$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{2abc}\geq 16$$

而當 $3=4a+1,\ 3=4b+1,\ 3=4c+1$ ，即 $a=b=c=\frac{1}{2}$ 時，

等號成立。