

高雄市九十八學年度  
高級中學數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試（一）試題

編號：\_\_\_\_\_（學生自填）

注意事項：

- (1)時間分配：2 小時
- (2)本試卷共五題，滿分 49 分，第一題 9 分，第二題 10 分，第三題 10 分，第四題 10 分，第五題 10 分。
- (3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4)不可使用電算器。
- (5)試題與答案卷一同繳回。

[問題一]：試求方程式  $2^a + 2^b + 2^c + 2^d = 10.625$  的整數解  $(a, b, c, d)$ ，其中  $a > b > c > d$ 。

[問題二]：已知  $\triangle ABC$  周長為 9，且  $\angle A = 60^\circ$ ，試求  $\triangle ABC$  面積的最大值。

[問題三]：已知  $x$ 、 $y$ 、 $z$  皆為正實數，

$$\text{且滿足方程組 } \begin{cases} \log_{10}(2000xy) = 4 + \log_{10} x \cdot \log_{10} y \\ \log_{10}(2yz) = 1 + \log_{10} y \cdot \log_{10} z \\ \log_{10}(zx) = \log_{10} z \cdot \log_{10} x \end{cases}$$

則  $x + y + z$  的值為何？

[問題四]：設正實數數列  $\{a_n\}$  滿足  $\sqrt{a_n a_{n-2}} - \sqrt{a_{n-1} a_{n-2}} = 2a_{n-1}$  ( $n \geq 3$ )，且  $a_1 = a_2 = 1$ ，試求  $a_n$ 。

[問題五]：設  $a, b, c$  是正實數且滿足  $1 = ab + bc + ca + 2abc$ 。試證：

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{2abc} \geq 16$$

並求等號成立時， $a, b, c$  分別是多少？