

高雄市九十八學年度
高級中學數理及資訊學科能力競賽

(數學科口試解答)

1. 首先令 $a+b+c = (3x)^2 = 9x^2$

$$a+b+d = (3x+3)^2 = 9x^2 + 18x + 9,$$

$$a+c+d = (3x+6)^2 = 9x^2 + 36x + 36,$$

$$b+c+d = (3x+9)^2 = 9x^2 + 54x + 81,$$

再把這四式加起來為 $3(a+b+c+d) = 36x^2 + 108x + 126$

所以 $(a+b+c+d) = 12x^2 + 36x + 42$

再利用上式扣掉前四式得到

$$a = 3x^2 - 18x - 39, \quad b = 3x^2 + 6, \quad c = 3x^2 + 18x + 33, \quad d = 3x^2 + 36x + 42$$

因為 a, b, c, d 都要是正數，所以 x 要大於 7，令 $x=8$ 代入

得到 $a=9, b=198, c=369, d=522$

此時 $a+b+c = 576$

$$a+b+d = 729$$

$$a+c+d = 900$$

$$b+c+d = 1089$$

x 只要大於 7， a, b, c, d 一定為正數，

$a+b+c, a+b+d, a+c+d, \text{ and } b+c+d$ 也一定為完全平方數，

所以有無限多組組合

2. 答： $\frac{364}{729}$

3. 因 $(\sin \frac{\phi}{2} + \cos \frac{\phi}{2})^2 = 1 + 2 \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} = 1 + \sin \phi$ ，故 $\sin \frac{\phi}{2} + \cos \frac{\phi}{2} = \pm \sqrt{1 + \sin \phi}$ 。因此，

$$\left\{ (t, \phi) \mid \sqrt{1 + \sin \phi} = t \right\} \subset \left\{ (t, \phi) \mid \sin \frac{\phi}{2} + \cos \frac{\phi}{2} = t \right\}。由此可知：$$

A： $\sin \frac{\phi}{2} + \cos \frac{\phi}{2} = t$ 成立是 B： $\sqrt{1 + \sin \phi} = t$ 成立的必要條件，而非充分條件。