九十八學年度台灣省第六區(嘉義區)

高級中學數理及資訊學科能力競賽

（數學科筆試二參考解答）

一、由 6 點中任取兩點形成一弦，共有 $\binom{6}{2}=15$ 條。而再從這 15 條弦中任意挑選四條，共有 $\binom{15}{4}=1365$ 種選法。又因為從 6 點中任取四點即可形成一凸四邊形，共有 $\binom{6}{2}=15$ 個，所以可形成凸四邊形的機率為 $\frac{15}{1365}=\frac{1}{91}$ 。

二、令 $Q(x)=(x+1)P(x)-x$，則 $Q(x)$ 為 $n+1$ 次多項式，且有 $0,1,\cdots,n$，$n+1$ 個根，

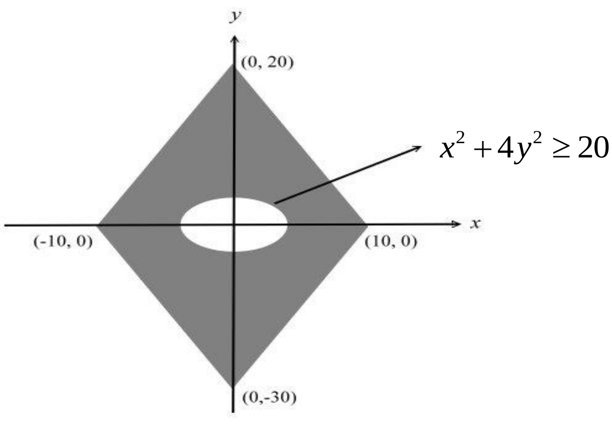
故 $Q(x)=\alpha\cdot x(x-1)\cdots(x-n)$，$\alpha\in\mathbb{R}$ 。

$\because$ $(x+1)P(x)-x$

令 $x=-1$ $\therefore$ $1=\alpha(-1)(-2)\cdots(-1-n)$ $\because$ n 為偶數 $\therefore$ $\alpha=-\frac{1}{(n+1)!}$

$x=n+1$ $\therefore$ $(n+1)P(n+1)-(n+1)=-\frac{1}{(n+1)}(n+1)\cdots1$ 。$\therefore$ $P(n+1)=\frac{n}{n+2}$ 。

三、(a)



(b) 令 $D_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| 2|x|+|y|\leq 20\right\}$

在 D_1 上的格子點是

(− 1 0 → 1 個

$(-\ 9\ ,,\ (-9,-1),\ (-9,-2)\ \ (-9,1),\ (-9,2)$ $\rightarrow$ 5 個

$(-\ 8y,,\ \ y\in\mathbb{Z},\ |\,y|\le 4$ $\rightarrow$ 9 個

$\vdots$ $\vdots$

$(\ 0\,y\ ,\ \ y\in\mathbb{Z},\ |\,y|\le 20$ $\rightarrow$ 41 個

因此，在 D_1 上的格子點數目為

$$2\sum_{i=1}^{10}(4i-3)+41=8\cdot\frac{11\times 10}{2}-60+41=421$$

令 $D_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,x^2+4y^2<20\right\}$。在 D_2 上的格子點是

$(\pm-\ \ 4y,,\ \ y=0$

$(\pm-\ \ 3y,,\ \ y=-1,0,1$

$(\pm-\ \ 2y,,\ \ y=-1,0,1$

$(\pm-\ \ 1y,,\ \ y=-2,-1,0,1,2$

$(\ \ 0y,,\ \ y=-2,-1,0,1,2$

因此，在 D_2 上的格子點數目為 $2(1+3+3+5)+5=29$。

所以，在 D 上格子點的數目為 $421-29=392$。

四、$6\times 200=2^4\times 3\times 5^2$。$k$ 及 $k+1$ 中必有一個能被 2^4 整除；$k,k+1,2k+1$ 中有一能被 3 整除；又只有一個能被 5 整除。令 $k=2^4t\pm 1$，考慮

$$2^4t\pm 1\equiv -9t\pm 1\equiv 0 \bmod 25$$
$$2^5t\pm 1\equiv 7t\pm 1\equiv 0 \bmod 25$$

選最小正整數解得 7，此時 $2^5t+1\equiv 7t+1\equiv 0 \bmod 25$，因此最小的 k 為 $2^4\times 7=112$。

五、 先求 $y=-(x+5)^2$ 與 $y=x+k$ 之切線：

由 $-(x+5)^2=x+k$ 恰有一解，即 $x^2+11x+(25+k)=0$ 恰有一解；

得 $k=\dfrac{21}{4}$。再求 $y=x^2$ 與 $y=x+\dfrac{21}{4}$ 的交點，得

$$x=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{22}\right)$$

$$y=x^2=\left[\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{22}\right)\right]^2=\frac{23}{4}+\frac{2\sqrt{22}}{4}=\frac{23+2\sqrt{22}}{4}$$

y 的最大值為 $\dfrac{23+2\sqrt{22}}{4}$ 。

六、 依一步上兩階的次數來分類，設一步上兩階的步數為 k 時，上樓的方式有 N_k 種。

(1) $k=0$ 時， $N_0=1$

(2) $k=1$ 時，一步一階的有 8 次，所以 $N_1=C_1^9$

(3) $2\le k\le 3$ 時，一步一階的有 $10-2k$ 次， $N_k=C_k^{10-2k+1}$

所以上樓梯方式共有 $\sum_{k=0}^{3}C_k^{10-2k+1}=41$ 。