九十八學年度台灣省第六區(嘉義區)

高級中學數理及資訊學科能力競賽

（數學科筆試一參考解答）

一、 方法一：

令 $C: x^2+y^2=1$，$B=(1,0),\ A=(a,b),\ M=(r,s)$。有 $a^2+b^2=r^2+s^2=1$。

則 $K=\left(\dfrac{r+1}{2},\dfrac{s}{2}\right)$，AM 之斜率為 $\dfrac{b-s}{a-r}$，KP 之斜率為 $-\dfrac{a-r}{b-s}$。 故 KP 的方程的形式為

$$y=-\frac{a-r}{b-s}x+k\text{ 。}$$

代入 K 的坐標得

$$\frac{s}{2}=-\frac{a-r}{b-s}\frac{r+1}{2}+k \quad \text{或} \quad k=\frac{s}{2}+\frac{a-r}{b-s}\frac{r+1}{2}\text{ 。}$$

因此 KP 的方程為

$$y=-\frac{a-r}{b-s}x+\frac{s}{2}+\frac{a-r}{b-s}\frac{r+1}{2} \qquad (**)$$

當 $r=-1, s=0$ 時，其方程為 $by=-(a+1)x$。當 $r=a, s=b$ 時，KP 可理解為過 AB 中點至 C 在點 A 的切線的垂線，其方程為

$$y=\frac{b}{a}x+\frac{b}{2}-\frac{b(a+1)}{2a}=\frac{b}{a}x-\frac{b}{2a}\text{ 。}$$

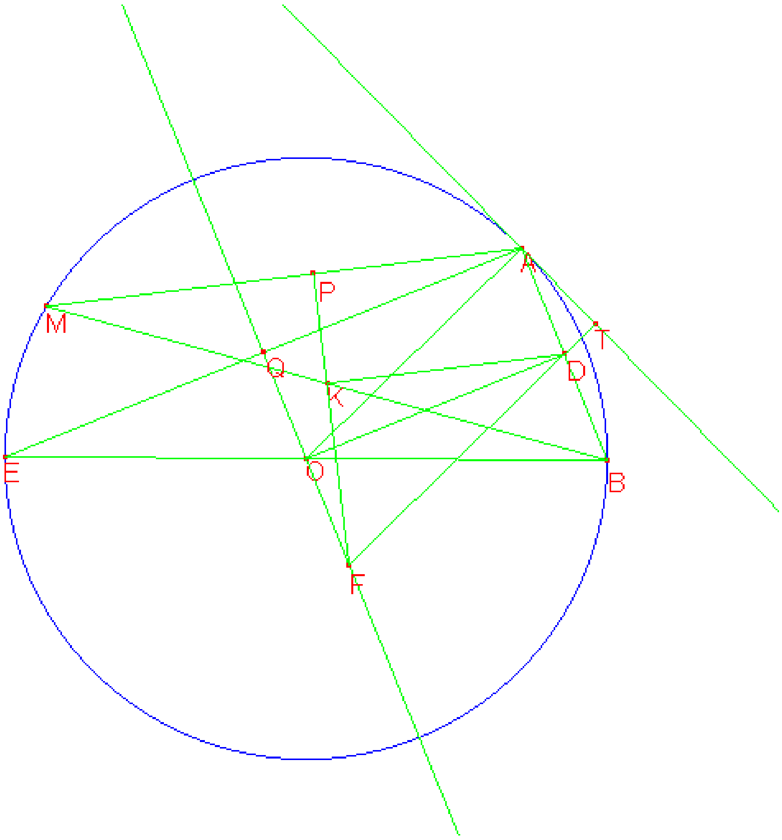
此兩線的交點為 $F=\left(\dfrac{1-a}{2},\dfrac{-b}{2}\right)$。代入(**)右邊得

$$-\frac{a-r}{b-s}\frac{1-a}{2}+\frac{s}{2}+\frac{a-r}{b-s}\frac{r+1}{2}=\frac{a-r}{b-s}\frac{a+r}{2}+\frac{s}{2}=\frac{-(b+s)}{2}+\frac{s}{2}=\frac{-b}{2}\text{ 。}$$

故 F 在 KP 上，得證。

方法二：如圖，O 為 C 的圓心，AT 為切線，D 為 AB 中點，過 F 作至 AM 之垂線，垂足為 P, $FP\perp AM, FO\perp AE, FD\perp AT$。FP 交 MB 於 K。此處的 P, K 與題目中的可能不一樣。現在要證明它們是一致的。因 $FP\perp AM, FO\perp AE$，故 $\angle MAE=\angle OFP$ 。又 $\angle MAE=\angle MBE$，得 O, K, B, F 四點共圓。

觀察 $OD \perp AB, OF \parallel BD$，得 O, D, B, F 是一長方形的四個頂點，故四點共圓。因此 K, O, D, B, F 五點共圓，故 $\angle MAE = \angle OFP = \angle ODK$。又因 $OD \parallel AE$，知 $AM \parallel KD$ 且 K 為 MB 之中點，得證。



二、 假設 $(1+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{13}$，其中 $a_n, b_n \in \mathbb{N}$，我們想要證明 $2^{n-1} \mid b_n$ 且 $2^n \mid (a_n + b_n)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$。$n=1$ 很明顯成立。歸納假設 $n=k$ 成立；則

$(1+\sqrt{13})^k = a_k + b_k\sqrt{13}$，其中 $a_k, b_k \in \mathbb{N}$，

$2^{k-1} \mid b_k$ 且 $2^k \mid (a_k + b_k)$ ....(1)

現在，對於 $n=k+1$，

$$(1+\sqrt{13})^{k+1} = (1+\sqrt{13})^k(1+\sqrt{13}) = (a_k + b_k\sqrt{13})(1+\sqrt{13})$$
$$= (a_k + 13b_k) + (a_k + b_k)\sqrt{13}$$

因此 $a_{k+1} = a_k + 13b_k$ 且 $b_{k+1} = a_k + b_k$.

由 (1) 知 $2^k \mid b_{k+1} = 2^k \left| (a_k + b_k) \right.$ ....(2)

此外，

$$a_{k+1}+b_{k+1}=2(a_k+b_k)+12b_k$$

因為 $2^k\,|\,(a_k+b_k)$ 且 $2^{k-1}\,|\,b_k$，所以，

$$2^{k+1}\,|\,2(a_k+b_k) \text{ 且 } 2^{k+1}\,|\,(12b_k).$$

因此，

$$2^{k+1}\,|\,2(a_{k+1}+b_{k+1})\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

使用數學歸納法，從(2), (3)知道

$$2^{n-1}\,|\,b_n \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$$

所以 $(1+\sqrt{13})^n-(1-\sqrt{13})^n=a_n+b_n\sqrt{13}-(a_n-b_n\sqrt{13})=2\sqrt{13}b_n$

能被 $2^n\sqrt{13}$ 整除。也就是

$$\frac{(1+\sqrt{13})^n-(1-\sqrt{13})^n}{2^n\sqrt{13}}$$ 為一個自然數。

三、假設 $d_1=15+\sqrt{220}$, $d_2=15-\sqrt{220}$，則由二項式定理可知

$$d_1^n=\binom{n}{0}\cdot 15^n+\binom{n}{1}\cdot 15^{n-1}\sqrt{220}+\cdots+\binom{n}{n}\cdot(\sqrt{220})^n$$

$$d_2^n=\binom{n}{0}\cdot 15^n-\binom{n}{1}\cdot 15^{n-1}\sqrt{220}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}\cdot(\sqrt{220})^n$$

所以，

$$d_1^n+d_2^n=2\left[15^n+\binom{n}{2}\cdot 15^{n-2}\cdot(\sqrt{220})^2+\binom{n}{4}\cdot 15^{n-4}\cdot(\sqrt{220})^4+\cdots\right]$$

則 $d_1^n+d_2^n$ 必為 10 的倍數，即表示 $d_1^n+d_2^n$ 的個位數字為 0。

令

$$d_1^{19}+d_2^{19}=10k_1$$

$$d_1^{82}+d_2^{82}=10k_2$$

所以，

$$d_1^{19}+d_1^{82}=10(k_1+k_2)-(d_2^{19}+d_2^{82})$$

又因為

$$d_2=15-\sqrt{220}=\frac{5}{15+\sqrt{220}}<\frac{1}{3}$$

所以， $d_1^{19}+d_1^{82}$ 的個位數字為 9。

四、 因 $9=ab+bc+ca=(6-c)c+ab=-(c-3)^2+9+ab$，故 $ab=(c-3)^2$。

同理 $bc=(a-3)^2,\ ac=(b-3)^2$。因此三數為正實數。又

$36=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$，故 $a^2+b^2+c^2=18$。

若 $c\geq 4$，則 $2ab<a^2+b^2\leq 2,\ ab=(c-3)^2<1$，得 $c<4$ 矛盾。所以 $c<4$。

明顯 $b<3$，因 $(3-b)^2=ac>a^2$，知 $3-b>a$，即 $3>a+b$，故 $c>3$。因此

$a^2<ab=(c-3)^2<1$，$a<1$，且因 $a+b=6-c>2$，$b>1$。

五、考慮橢圓的參數式 $(2\cos\theta,3\sin\theta)$，$0\leq\theta\leq 2\pi$。若 $A(2\cos\alpha,3\sin\alpha)$，

$B(2\cos\beta,3\sin\beta)$，$C(2\cos\gamma,3\sin\gamma)$，三點所決定的 ΔABC 的重心恰為原點，則

$$\begin{cases}2\cos\alpha+2\cos\beta+2\cos\gamma=0\\ 3\sin\alpha+3\sin\beta+3\sin\gamma=0\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0\\ \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

由(1)可知 $P(\cos\alpha,\sin\alpha),\ Q(\cos\beta,\sin\beta),\ R(\cos\gamma,\sin\gamma)$ 三點所決定的 ΔPQR 的重心恰為原點。由此可得 ΔPQR 為正三角形，因而 $\overline{OP},\ \overline{OQ},\ \overline{OR}$ 互相夾 120°。但 A 的坐標為 $\left(1,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=(2\cos 60^\circ,3\sin 60^\circ)$，即 $\alpha=60^\circ$，所以 $\beta=180^\circ$，$\gamma=300^\circ$（或 $\gamma=180^\circ$，$\beta=300^\circ$），即 B, C 的坐標各為

$$(2\cos 180^\circ,3\sin 180^\circ)=(-2,0)$$

$$(2\cos 300^\circ,3\sin 300^\circ)=(1,-\tfrac{3\sqrt{3}}{2})$$

故 $\overline{BC}=\sqrt{(1+2)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{7}$。