

九十八學年度台灣省第六區(嘉義區)  
高級中學數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試(一) 試題

編號：\_\_\_\_\_ (學生自填)

(時間二小時)

注意事項：

1. 本試卷共五題計算證明題，滿分為四十九分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

---

一、一圓的圓心為  $O$ ， $A$ 、 $B$ 、 $M$  為圓上的相異點； $K$  為  $\overline{BM}$  的中點，過點  $K$  作一條至  $\overline{AM}$  的垂線，垂足為  $P$ ； $D$  為  $\overline{AB}$  的中點， $T$  為圓在點  $A$  的切線上的一點，且  $\overline{DT}$  與  $\overline{AT}$  垂直；延長  $\overline{BO}$  交圓於另一點  $E$ ， $\overline{AE}$  的中點為  $Q$ ， $F$  為  $\overline{DT}$  與  $\overline{OQ}$  的交點。證明： $K, P, F$  三點共線。

二、令  $n$  為自然數，證明  $\frac{(1+\sqrt{13})^n - (1-\sqrt{13})^n}{2^n \sqrt{13}}$  為一個自然數。

三、試求  $(15+\sqrt{220})^{19} + (15+\sqrt{220})^{82}$  的展開式中的個位數字。

四、三實數  $a < b < c$  滿足  $a+b+c=6$ ， $ab+bc+ca=9$ 。試證：

$$0 < a < 1 < b < 3 < c < 4。$$

五、 $A$ 、 $B$  及  $C$  是橢圓  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  上三點，且  $\triangle ABC$  的重心恰為原點，

已知  $A$  的座標是  $(1, \frac{3\sqrt{3}}{2})$ ，求  $\overline{BC}$  之長。