

九十八學年度台灣省第八區(高屏區)
高級中學數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試(二) 試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

- (1) 時間分配：1 小時
- (2) 本試卷共五題，滿分 21 分。第一題 5 分，第二題 4 分，第三題 4 分，第四題 4 分，第五題 4 分。
- (3) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4) 不可使用電算器。
- (5) 試題與答案卷一同繳回。

一、設函數具有性質 $f(x-1)f(y-1) = f(xy-x-y+1) + 2x-3y+3$ ，求 $f(2009) = ?$

二、求 $(x^2+1)^{200}$ 被 x^4+1 除的餘式為何？

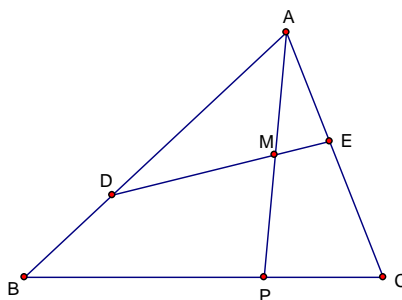
三、令 p, q, r 為 $x^3-5x^2+3x-2=0$ 的三個根，求 $\frac{p}{q} + \frac{p}{r} + \frac{q}{p} + \frac{q}{r} + \frac{r}{p} + \frac{r}{q}$ 的值。

四、在 $\triangle ABC$ 的邊 \overline{BC} 上取一點 P ，使得 $\overline{BP} = \frac{2}{3}\overline{BC}$ ，點 M 是線段 \overline{AP} 的中點，直線

\overline{DE} 經過 M 點且分別交線段 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 於 D, E 兩點 (如附圖；此圖僅供參考)。

令 $\triangle ADM, \triangle AEM$ 與 $\triangle ABC$ 的面積分別是 a, b 與 c 。

試證： $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{18}{c}$ 。



五、已知 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{4})$ ，且 $\sin \alpha \cdot (1 - \tan \beta) + \cos \alpha \cdot (1 + \tan \beta) = \sqrt{2} \sec \beta$ ，

求 $\alpha + \beta = ?$