九十八學年度台灣省第八區(高屏區)

高級中學數理及資訊學科能力競賽

（數學科筆試一參考解答）

一、 因為
$$a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{c}+c+\frac{1}{a}=\frac{22}{3}$$
$$(a+\frac{1}{b})(b+\frac{1}{c})(c+\frac{1}{a})=\frac{28}{3}$$
$$abc+a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{c}+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{abc}=\frac{28}{3}$$

所以 $abc+\dfrac{1}{abc}=2$. 因此 $\sqrt{abc}=1$

二、 設正方形 *DEFG* 邊長為 *a*

△AED～△ABC

AD:ED=AC:BC

AD = 4a/5

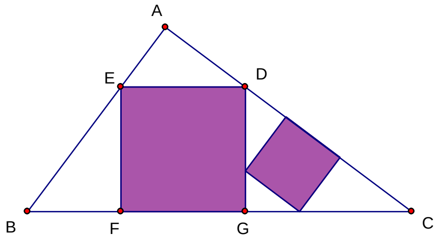
△GDC～△ABC

DC:DG = BC:AB

DC = 5a/3

AD + DC = AC = 4

4a/5 + 5a/3 = 4



a = 60/37 ➔ 正方形 *DEFG* 的面積為 S = a^2

△GDC～△ABC ➔ DG : AB = a:3 ➔ △GDC 中的正方形與△ABC 中的正方形其邊長比為 a:3， 令 r = a/3 = 20/37

正方形面積的總合為

S + S×r^2 + S×r^4 + … = S/(1 – r^2) = [60×60/(37×37)]/(969/37×37) = 3600 / 969 =1200/323

三、(1) 若 $x\in Q, x\in\left(\frac{1}{3},\frac{3}{7}\right)$， 設 $x=\frac{p}{q}$ 其中 $(p,q)=1,\quad 0<p<q$

$$\because\ \frac{1}{3}<\frac{p}{q}<\frac{3}{7}\quad\Rightarrow\begin{cases}q<3p\\7p<3q\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q+1\le 3p\\7p+1\le 3q\end{cases}$$
$$\Rightarrow\ q+1\le 3p\le 3\cdot\frac{3q-1}{7}$$
$$\Rightarrow\ 7q+7\le 9q-3$$
$$\Rightarrow\ q\ge 5$$

$$\therefore \quad f(x)=f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{2p+1}{2q}\le\frac{2\cdot\frac{3q-1}{7}+1}{2q}=\frac{6q+5}{14q}=\frac{3}{7}+\frac{5}{14q}$$

$$\le\frac{3}{7}+\frac{5}{14\times 5}=\frac{1}{2} \text{，}$$

當"="成立，即 $q=5 \;\Rightarrow\; 3p=5+1=3\cdot\frac{3\times 5-1}{7}$

$\Rightarrow\; p=2$

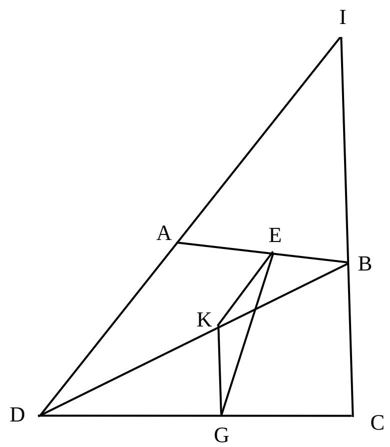
$\Rightarrow\; x=\frac{2}{5}\in\left(\frac{1}{3},\frac{3}{7}\right)$

由定義知 $f\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{2\times 2+1}{2\times 5}=\frac{1}{2}=\max\limits_{x\in\mathbb{Q}\cap\left(\frac{1}{3},\frac{3}{7}\right)} f(x)$。

（2）若 $x\in Q, x\in\left(\frac{1}{3},\frac{3}{7}\right)$，則 $f(x)=x<\frac{3}{7}<\frac{1}{2}$。

由(1)(2)討論知：$f(x)$在區間 $\left(\frac{1}{3},\frac{3}{7}\right)$ 上的最大值為 $\frac{1}{2}$。

四、(1) 如圖示：



在 $\overline{DB}$ 上取一點 K，使 $\overline{EK}//\overline{AD}$，連接 $\overline{GK}$，因為

（1）$\frac{\overline{DG}}{\overline{GC}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\frac{\overline{DK}}{\overline{KB}} \quad\Rightarrow\quad \overline{GK}//\overleftrightarrow{BC}$；

（2）$\Delta EKB\sim\Delta ADB$ 且 $\Delta KGD\sim\Delta BCD \;\Rightarrow\; \frac{\overline{EK}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}},\quad \frac{\overline{GK}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{DG}}{\overline{CD}}$，

故得知

$$\overline{EK}=\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}+\overline{BE}}\cdot\overline{AD}=\frac{1}{\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}+1}\cdot\overline{AD} \text{，}$$

$$\overline{GK}=\frac{\overline{DG}}{\overline{DG}+\overline{GC}}\cdot\overline{BC}=\frac{1}{\frac{\overline{GC}}{\overline{DG}}+1}\cdot\overline{BC}=\frac{1}{\frac{\overline{EB}}{\overline{AE}}+1}\cdot\overline{BC}$$ 。

$\because$ $\overrightarrow{IS}\,//\,\overline{GE}$ ，且 $\overrightarrow{IS}$ 為 $\angle AIB$ 之角平分線

$\Rightarrow \angle KEG=\angle AIS,\quad \angle KGE=\angle SIB$ 。

$\therefore$ $\overline{EK}=\overline{GK}$ $\Rightarrow$ $\overline{EK}=\frac{1}{\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}+1}\cdot\overline{AD}=\overline{GK}=\frac{1}{\frac{\overline{EB}}{\overline{AE}}+1}\cdot\overline{BC}$

$\Rightarrow$ $\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}=\frac{\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}+1}{\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}}+1}=\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}$ 。

同理亦可證得 $\frac{\overline{AB}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{AH}}{\overline{HD}}$ 。

五、可將數按 1, 5, 9, 13, 2, 6, 10, 14, 3, 7, 11, 15, 4, 8, 12 循環排列，選出的數跳一格即可。例如：6, 14, 7, 15, 8, 1, 9 即為所求，故最多為 7 個；因可從任意一個數開始，故選法共有 15 種。