# 九十八學年度台灣省第八區(高屏區)

# 高級中學數理及資訊學科能力競賽

# 數學科筆試（一）試題

**編號：_____（學生自填）**

**注意事項：**

(1) 時間分配：2 小時

(2) 本試卷共五題，滿分 49 分。第一題 10 分，第二題 10 分，第三題 10 分，第四題 10 分，第五題 9 分。

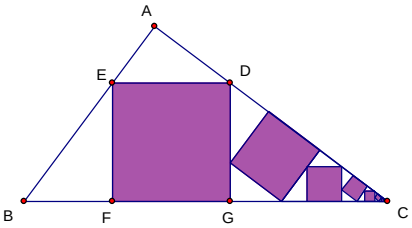
(3) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4) 不可使用電算器。

(5) 試題與答案卷一同繳回。

一、令 $a,b,c$ 為三個正實數且滿足 $a+\frac{1}{b}=4$，$b+\frac{1}{c}=1$，$c+\frac{1}{a}=\frac{7}{3}$。求 $\sqrt{abc}$ =？

二、$\triangle ABC$ 中線段 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{BC}$ 長分別為 3、4、5，在 $\triangle ABC$ 中畫一正方形 $DEFG$ 使得正方形一邊 $\overline{FG}$ 落在斜邊 $\overline{BC}$ 邊上，$D$、$E$ 兩頂點分別落在兩股 $\overline{AC}$ 與 $\overline{AB}$ 邊上。接著在 $\triangle GCD$ 中依相同方式畫一正方形，使得正方形一邊落在斜邊上，另兩頂點分別落在兩股邊上，依此方式，連續不斷在以 $C$ 點為頂點的空白三角形上畫一正方形（如附圖；此圖僅供參考），試求這些正方形面積的總合。




三、設函數 $f:(0,1)\to R$ 定義為

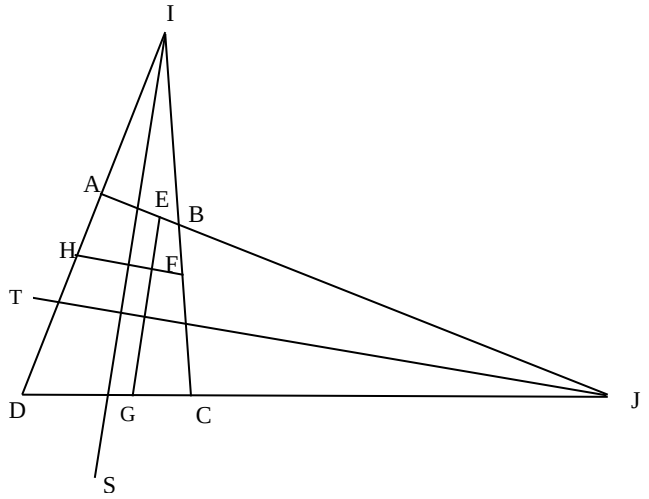
$$f(x)=\begin{cases} x, & x\notin Q \\ \dfrac{2p+1}{2q}, & x=\dfrac{p}{q},\ (p,q)=1,\quad 0<p<q,\quad p,q\in N \end{cases}$$

求 $f(x)$ 在區間 $\left(\frac{1}{3},\frac{3}{7}\right)$ 上的最大值？

四、已知四邊形 $ABCD$，設直線 $\overleftrightarrow{AD}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 相交於 $I$ 點，直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 相交於 $J$ 點。

過 $I$ 點作 $\angle AIB$ 之角平分線 $\overleftrightarrow{IS}$，過 $J$ 點作 $\angle BJC$ 之角平分線 $\overleftrightarrow{JT}$。令 $E,F,G,H$ 四點分別在 $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CD},\overline{DA}$ 邊上，使得 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\dfrac{\overline{DG}}{\overline{GC}}$，$\dfrac{\overline{AH}}{\overline{HD}}=\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}$，且 $\overline{EG}\,//\,\overleftrightarrow{IS}$，$\overline{FH}\,//\,\overleftrightarrow{JT}$。（如附圖；此圖僅供參考）

試證明：$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}$，$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DC}}=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{HD}}$




五、從 1, 2, 3, ……, 14, 15 的數中最多可選出多少個數，使得選出的數中任意兩個數的差不會為 4 或 11？滿足此種最多個數的要求下其選法共有多少種？