九十七學年度台中區

高級中學數學及自然科能力競賽

數學科筆試(二)【參考解答】

一、【解】

設 D, E 為圓心，作 $\overline{EH}$ 交 $\overline{BD}$ 於 H，直角 $\Delta EFA \cong$ 直角 ΔEHD

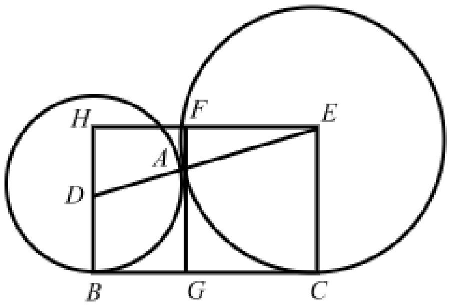
$\overline{HE}=\overline{BC}$, $\overline{HD}=35-1=34$, $\overline{DE}=35+1=36$.

畢氏定理得 $\overline{DE}^2=\overline{HD}^2+\overline{HE}^2$

$\overline{HE}=\sqrt{36^2-34^2}=2\sqrt{35}$

$\dfrac{\overline{FA}}{\overline{HD}}=\dfrac{35}{36}$, $\overline{FA}=\dfrac{35\cdot 34}{36}$, $\overline{AG}=35-\overline{FA}=\dfrac{35}{18}$

$\dfrac{\overline{FE}}{\overline{HE}}=\dfrac{35}{36}$, $\overline{FE}=\dfrac{35}{36}\cdot 2\sqrt{35}=\overline{GC}$



從畢氏定理得 $\overline{AC}=\sqrt{\overline{AG}^2+\overline{GC}^2}=\dfrac{70}{6}$.

二、【解】

設三角形的面積為 Δ，則三邊長為 $a=6\Delta,\ b=10\Delta,\ c=14\Delta$ 。令

$s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)=15\Delta$ 。因 $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ，得 $\Delta=15\sqrt{3}\Delta^2$ 或 $\Delta=\dfrac{\sqrt{3}}{45}$.

$\therefore\ a=\dfrac{6}{45}\sqrt{3},\ b=\dfrac{10}{45}\sqrt{3},\ c=\dfrac{14}{45}\sqrt{3}$.

三、【解】

(a) $C_3^4(\frac{3}{4})^3(\frac{1}{4})=\frac{27}{64}=P(Aa\times Aa)=P$（父母皆為 Aa）

(b) 令 K_3^4 表示 4 小孩中 3 個為顯性

只有 $Aa\times Aa$ 及 $Aa\times aa$ 這兩種組合會產生 K_3^4 的情形

	Aa	Aa	AA
aa	Aa	Aa aa	Aa
Aa		AA Aa Aa	AA Aa
AA			AA

$$P(Aa\times Aa \mid K_3^4)=\frac{P(K_3^4\cap Aa\times Aa)}{P(K_3^4)}$$

$$=\frac{P(K_3^4\cap Aa\times Aa)P(Aa\times Aa)}{P(K_3^4 \mid Aa\times Aa)P(Aa\times Aa)+P(K_3^4 \mid Aa\times aa)P(Aa\times aa)}$$

$$=\frac{\frac{27}{64}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{27}{64}\cdot\frac{1}{4}+C_3^4(\frac{1}{2})^4\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2}=\frac{\frac{27}{64\cdot 4}}{\frac{27+16}{64\cdot 4}}=\frac{27}{43}.$$

四、【解】

這四個人選擇某一道小菜的方式有 $2^4-2=14$ 種(扣除掉各人都選及各人都不選這兩種情形)，故可能方式共 $14^2=2^{12}7^{12}$ 。

五、【解】

令 $f_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k 2^{2n-2k}\binom{2n-k+1}{k}$

$f_0=1,\ f_1=2,\ f_2=3,\ \cdots$

$\therefore f_n=n+1$

$\therefore f_{100}=100+1=101$

事實上 $f_n=2f_{n-1}-f_{n-2}$. 令 $g_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k 2^{2n-2k}\binom{2n-k}{k}$

使用等式 $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}$

得 $g_{n+1}=4f_n-g_n$ (1)

$f_{n+1}=g_{n+1}-f_n$ (2)

由 (2) 得 $g_{n+1}=f_{n+1}+f_n$

代回 (1) 得

$$f_{n+1}+f_n=4f_n-(f_n+f_{n-1}) \quad\Rightarrow f_{n+1}=2f_n-f_{n-1}.$$