九十七學年度台中區

高級中學數學及自然科能力競賽

數學科筆試(一)【參考解答】

問題一： 正實數 x, y 滿足 $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4$。試證 $x^3 + y^3 \leq 2$。

【解】

若 $x > 1, y > 1$，則 $x^2 + y^3 < x^3 + y^4$。又若 $x \leq 1, y \leq 1$，$x^3 + y^3 \leq 2$。

若 $x > 1, y < 1$，因 $x + \dfrac{1}{x} \geq 2, y + \dfrac{1}{y} \geq 2$，得 $y^n\left(\dfrac{1}{y} - 1\right) \geq y^n(1-y)$，

$x^n\left(x-1\right) \geq x^n\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$。因此，

$$1 - y \geq y - y^2 \geq y^2 - y^3 \geq y^3 - y^4 \geq x^3 - x^2 \geq x^2 - x \geq x - 1。$$

故 $2 \geq x + y \geq x^2 + y^2 \geq x^3 + y^3$。

情形 $x < 1,\ y > 1$ 也如此處理。

問題二： 用 0, 1, 2 組成字串，但相鄰的三個位置不得出現‘0, 1, 2’（按此順序）。令 a_n 為滿足上述條件且長度為 n 的字串個數。試求出 a_n 為 6 的倍數的充要條件。

【解】

設第一個數為 1，則共有 a_{n-1} 個字串。設第一個數碼為 2，則共有 a_{n-1} 個字串。若第一個數碼為 0，則共有 $a_{n-1} - a_{n-3}$ 個字串（減去的一項為開頭為 012 的字串）。因此長度為 n 的字串共有

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-1} + (a_{n-1} - a_{n-3}) = 3a_{n-1} - a_{n-3}$$

個。又 $a_1 = 3,\ a_2 = 9,\ a_3 = 26$，由數學歸納法易得，$a_n$ 為 3 的倍數的充要條件為

$$n \equiv 1\ ,\quad 2$$

$a_n,\ n = 1,\ 2,\ \cdots$ 除以 2 的餘數為：

1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, $\cdots$

是週期長為 7 的循環，而 a_n 為偶數的充要條件為 $n \equiv 3,\ 5,\ 6 \bmod 7$。

因此 a_n 為 6 的倍數的充要條件為

$$n \equiv 5\ ,\quad 10\ ,\quad 13\ , \bmod 21。$$

問題三： 設 k 是滿足下列條件的最小正整數：有 5 個不同整數 $m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ m_5$ 使得多項式 $P(x) = (x-m_1)(x-m_2)(x-m_3)(x-m_4)(x-m_5)$ 恰有 k 個不為零的係數。試找出 k 的值及一組相應於 k 的 $m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ m_5$ 之值。

【解】

(1) $k=1$時，$P(x)=x^5$，但不合條件（5 個不同$m_1,\ \cdots,\ m_5$）

(2) $k=2$時，$P(x)=x^5+ax^r$，其中$a\in\mathbb{Z},\ 0\le r\le 4$.

但若$r\ge 2$，則m_i's中至少有二個零；若$r=0$或 1 時，則$P(x)$至少有一非實根，即m_i's中至少有一複數。

$\therefore k\ge 3$. 而且由$\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$得

$$
\begin{aligned}
P(x)&=x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)\\
&=x(x^2-1)(x^2-4)=x^5-5x^3+4x.
\end{aligned}
$$

$\therefore k=3$.

問題四： ΔABC為一三角形。過 A 及 B 作一圓交 BC 內一點 D，過 C 及 B 作一圓交 AB 內一點 E，這兩圓交於 B 及另一點 F。若 A,E,D,C 都在以 O 為圓心的圓上，試證：

(1) $AD,\ BF,\ CE$ 共點；

(2) $\angle BFO$為直角。

【解】

設 AD,CE 交於 P，如圖 BP 延線交圓於 S 及 T。過 D 作直線平行 BP，交圓於另一點 R。弦 ST 與 ER 交於 M。則

$$\angle DCE=\angle DRE=\angle DAE\text{。}$$

因$DR\,||\,BS$，$\angle DRE=\angle RMS=\angle BME$。得$\angle DCE=\angle BME=\angle DAE$，$B,C,M,E$ 及 P,M,E,A 共圓。因 B,C,M,E 共圓，

$$BP\cdot PM=CP\cdot PE=AP\cdot PD\text{，}$$

且 B,D,M,A 共圓。因此 M 就是 F。

因$DR\,||\,BS$，$\angle RDM=\angle DMB=\angle DAB=\angle DRE$，

故$DM=RM$。因此過 M 至 DR 之垂線通過 O，

且 OM 與 DR 及 TS 垂直。故得證。