

九十七學年度台中區  
高級中學數學及自然科能力競賽

數學科筆試(一)

編號： \_\_\_\_\_  
(學生自填)

(時間二小時)

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為四十九分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

---

一、正實數  $x, y$  滿足  $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4$ 。試證  $x^3 + y^3 \leq 2$ 。(12 分)

二、用 0, 1, 2 組成字串，但相鄰的三個位置不得出現 '0, 1, 2' (按此順序)。令  $a_n$  為滿足上述條件且長度為  $n$  的字串個數。試求出  $a_n$  為 6 的倍數的充要條件。(12 分)

三、設  $k$  是滿足下列條件的最小正整數：有 5 個不同整數  $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5$  使得多項式  $P(x) = (x - m_1)(x - m_2)(x - m_3)(x - m_4)(x - m_5)$  恰有  $k$  個不為零的係數。試找出  $k$  的值及一組相應於  $k$  的  $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5$  之值。(12 分)

四、 $\triangle ABC$  為一三角形。過  $A$  及  $B$  作一圓交  $BC$  內一點  $D$ ，過  $C$  及  $B$  作一圓交  $AB$  內一點  $E$ ，這兩圓交於  $B$  及另一點  $F$ 。若  $A, E, D, C$  都在以  $O$  為圓心的圓上，試證：

(1)  $AD, BF, CE$  共點；

(2)  $\angle BFO$  為直角。(13 分)