九十七學年度臺北市

高級中學數學及自然學科能力競賽

數學科筆試（二）試題

編號：________________（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題 3 分，滿分為 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫在答案欄內。

1. 給定兩函數 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ ，$g(x)=f(f(f(x)))$ ，例如：由 $f(2)=-1,\ f(-1)=\dfrac{1}{2}$ 可得 $g(2)=f(f(f(2)))=f(f(-1))=f(\dfrac{1}{2})=2$ 。試寫出下列各函數值：

   (1) $g(97)=$ __（一(1)）__，(2) $g(2008)=$ __（一(2)）__，(3) $g(0)=$ __（一(3)）__。

   (函數沒有定義的寫<u>**不存在**</u>，有定義的求出其函數值；每一小題各 1 分)

2. 將 81 個正數 $a_{ij}\ (i,j=1,2,3,\cdots,9)$ 排成 9 行 9 列：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \cdots\cdots a_{19} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \cdots\cdots a_{29} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \cdots\cdots a_{39} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \cdots\cdots a_{49} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{91} & a_{92} & a_{93} & a_{94} \cdots\cdots a_{99} \end{matrix}$$

   其中每一橫列的數均成等差數列，每一直行的數均成等比數列，且所有的公比相等。若 $a_{24}=1, a_{33}=\dfrac{3}{8}, a_{42}=\dfrac{1}{8}$ ，則 $\displaystyle\sum_{k=1}^{9} a_{kk}=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{99}=$ __（二）__。

3. 設 $P(n)$ 表示正整數 n 的所有正因數之積，例如：$P(6)=1\times2\times3\times6=36$ 。若 $P(n)=2^{18}\times7^{12}$ ，則正整數 $n=$ __（三）__。

4. 設 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_8$ 為等差數列， $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_8$ 是另一數列。若

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{8} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_8 = 2008 \\ \sum_{k=1}^{8} b_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_8 = 11 \\ \sum_{k=1}^{8} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_8 b_8 = 9 \end{cases},$$

則 $\sum_{k=1}^{8} a_k b_{9-k} = a_1 b_8 + a_2 b_7 + a_3 b_6 + \cdots + a_8 b_1 =$ ___(四)___。

5. 設 a, b, c 都是正實數，若 $11, 21, 31$ 是方程式 $a^{\frac{1}{x}} \cdot b^{\frac{1}{x+3}} \cdot c^{\frac{1}{x+6}} = 10$ 的三個根，則 $\log(abc) =$ ___(五)___。

6. 設 a 為正實數，若恰有一個實數 k 使得方程式 $x^2 + (k^2 + ak)x + k^2 + ak + 127 = 0$ 的兩根均為質數，則 $a =$ ___(六)___。

7. 下圖中，四邊形 $ABCD$ 是內接於一扇形的正方形，頂點 A、D 分別在扇形的兩半徑上，頂點 B、C 在扇形的弧上，而 M 是扇形的弧中點。設扇形的半徑為 r，而圓心角 $\angle AOD = \theta$ 是一銳角，則正方形 $ABCD$ 的面積為___(七)___。(以 r 與 θ 表示)