九十七學年度臺北市

高級中學數學及自然學科能力競賽

數學科筆試（一）【參考解答】

問題一： 試求所有可能的有理數 x ，使得 $9x^2+23x-2$ 之值恰為兩個連續正偶數的乘積。

【解】設兩連續正偶數為 $k, k+2$ ，則 $9x^2+23x-2=k(k+2)$ ，即

$$9x^2+23x-(k^2+2k+2)=0 \text{。}$$

由於 x 為有理數且判別式 Δ 為整數，故判別式必為完全平方數，即

$$\begin{aligned}\Delta &= 23^2+4\times 9\times(k^2+2k+2)\\ &=565+[6(k+1)]^2\\ &=p^2\end{aligned}$$

其中 $p\geq 0$。 由此可得

$$p^2-[6(k+1)]^2=565=113\times 5=565\times 1 \text{。}$$

其中，左邊 $=[p+6(k+1)]\times[p-6(k+1)]$。因為 $p\geq 0$ 且 $k>0$，所以

$$\begin{cases}p+6(k+1)=113\\ p-6(k+1)=5\end{cases} \qquad (1)$$

或

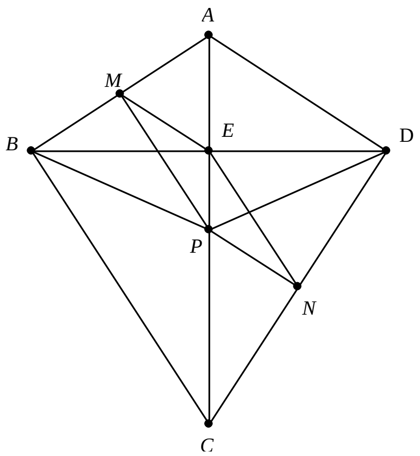
$$\begin{cases}p+6(k+1)=565\\ p-6(k+1)=1\end{cases} \qquad (2)$$

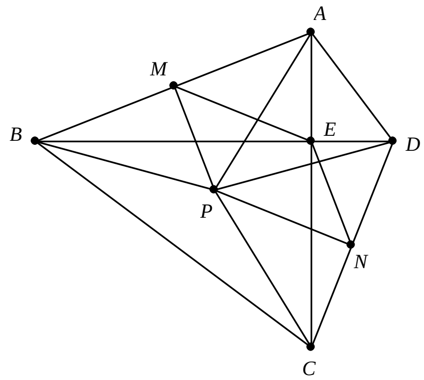
解(1)得 $k=8$ ，因而 $x=2$ 或 $-\dfrac{41}{9}$ ；

解(2)得 $k=46$ ，因而 $x=-17$ 或 $\dfrac{130}{9}$ 。

問題二： 給定一凸四邊形 $ABCD$ 。若兩對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 互相垂直；又其內部有一點 P 滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}$、$\overline{PC}=\overline{PD}$、且 ΔPAB 與 ΔPCD 的面積相等，則 A,B,C 與 D 四點共圓。試證之。（只證明 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 不平行的情形即可。）

【解】





設對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$垂直於點 E、$\overline{AB}$與$\overline{CD}$的中點分別為M與N；又設$\angle ABD=\varphi$、$\angle ACD=\psi$。因為$\overline{PA}=\overline{PB}$，所以，$P$點在$\overline{AB}$的垂直平分線上。同理，$P$點在$\overline{CD}$的垂直平分線上。於是，$\overline{PM}\perp\overline{AB}$、$\overline{PN}\perp\overline{CD}$。

假設P點位於$\angle BEC$的內部或在$\overline{AC}$上。因為ΔABE是直角三角形而M是斜邊$\overline{AB}$的中點，所以，得

$$\angle BEM=\varphi,\quad \angle AME=2\varphi,\quad \angle PME=90^\circ-2\varphi\text{ 。}$$

同理，因為ΔCDE是直角三角形而N是斜邊$\overline{CD}$的中點，所以，得

$$\angle CEN=\psi,\quad \angle DNE=2\psi,\quad \angle PNE=90^\circ-2\psi.$$

由此可得$\angle MEN=90^\circ+\varphi+\psi$，且

$$\begin{aligned}\angle NPM&=360^\circ-\angle PME-\angle MEN-\angle ENP\\&=360^\circ-(90^\circ-2\varphi)-(90^\circ+\varphi+\psi)-(90^\circ-2\psi)\\&=90^\circ+\varphi+\psi\\&=\angle MEN\text{ 。}\end{aligned}$$

因為ΔPAB與ΔPCD的面積相等，所以，可知$\overline{AM}\times\overline{PM}=\overline{CN}\times\overline{PN}$。

因為 $\overline{EM}=\overline{AM}$ 且 $\overline{EN}=\overline{CN}$，

所以，$\overline{EM}\times\overline{PM}=\overline{EN}\times\overline{PN}$ 或 $\dfrac{\overline{EM}}{\overline{EN}}=\dfrac{\overline{PN}}{\overline{PM}}$。

又因為$\angle MEN=\angle NPM$，所以，ΔEMN與ΔPNM全等。由此可知

$$\angle EMN=\angle PNM\text{ ，}\angle ENM=\angle PMN\text{ 。}$$

於是，$EMPN$是平行四邊形，$\angle PME=\angle PNE$，或$90^\circ-2\varphi=90^\circ-2\psi$。 由此得$\varphi=\psi$，或$\angle ABD=\angle ACD$。因此，$A,B,C,D$四點共圓。

問題三：考慮平面上 100 條相異的直線，其中任意三條直線都不共點。設 p 表示這 100 條直線將平面分割成的區域數，而 q 表示交點的個數，試求 $p-q$ 之所有可能的值，並證明你(妳)的答案。

【解】若平面上有 n 條直線，任意三條直線都不共點，則可以證明： $p-q=n+1$。

設此 n 條直線可分成 m 組平行線，各組分別有 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 條直線，且

$n=k_1+k_2+\cdots+k_m$ ，其中 $k_1\ge k_2\ge\cdots\ge k_m$ 。

則交點數 q 與區域數 p 滿足：$q=\sum_{i<j}k_ik_j$ ，且

$$
\begin{aligned}
p&=(k_1+1)+k_2(k_1+1)+k_3(k_2+k_1+1)+\cdots+k_m(k_{m-1}+k_{m-2}+\cdots+k_1+1)\\
&=1+\sum_{i=1}^{m}k_i+\sum_{i<j}k_ik_j \text{ 。}
\end{aligned}
$$

因此， $p=1+n+q$ ，即 $p-q=n+1$。故所求 $p-q=100+1=101$ 。

【另解】對 n 用數學歸納法，可以證明恆等式： $p-q=n+1$。

當 $n=1$ 時， $p=2,q=0$ ；故 $p-q=n+1$成立。

假設此命題對 n 條直線的情形都成立，並考慮 $n+1$ 條直線的情形，設其區域數與交點數分別為 P,Q 。我們可以任取其中一條直線 L ，並設與 L 平行的直線恰有 k 條。則直線 L 上的交點數為

$$(n+1)-(k+1)=n-k \text{ 。}$$

當我們從這 $n+1$ 條直線中去掉直線 L 後，剩下的 n 條直線之區域數 p 與交點數 q ，依歸納法的假設，可知：

$$p-q=n+1\text{。}$$

又此時， $p=P-(n-k+1)$ ， $q=Q-(n-k)$ 。因此，

$$P-Q=(p+n-k+1)-(q+n-k)=p-q+1=(n+1)+1\text{ 。}$$

故由數學歸納法，本命題得證。

問題四：(1) 設 $a>0$ 且 $0<b<1$，試確定 a^b 與 $\dfrac{a}{a+b}$ 之大小關係。

(2) 試證：對任意三個正實數 a,b,c ，下述不等式恆成立：

$$(a+b)^c+(b+c)^a+(c+a)^b>2\text{ 。}$$

【解】(1) 當 $a\geq 1$ 時， $a^b\geq 1$ ，而 $\dfrac{a}{a+b}<1$，此時 $a^b>\dfrac{a}{a+b}$ 。

當 $0<a<1$ 時， $a^b>\dfrac{a}{a+b} \quad \Leftrightarrow \quad \log a^b>\log\dfrac{a}{a+b}$

$$\Leftrightarrow \quad b\log a>\log a-\log(a+b)$$

$$\Leftrightarrow \quad \log(a+b)>(1-b)\log a$$

最後的不等式顯然成立 (因 $a+b>a>0$ 且 $0<1-b<1$)。

因此，當 $a>0$ 且 $0<b<1$時， $a^b>\dfrac{a}{a+b}$ 恆成立。

(2) 令 $s=a+b+c$ 。

(i) 若 a,b,c 中有一數大於或等於 1，如 $a\geq 1$，則

$(a+b)^c+(c+a)^b\geq 2$，故 $(a+b)^c+(b+c)^a+(c+a)^b>2$ 。

(ii) 若 a,b,c 三數均小於 1，即 $0<a,b,c<1$，則原不等式可轉換成

$(s-c)^c+(s-a)^a+(s-b)^b>2$。再由

$s-a>0, s-b>0, s-c>0$ 且 $0<a,b,c<1$，

可得 $\quad (a+b)^c=(s-c)^c>\dfrac{s-c}{(s-c)+c}=\dfrac{s-c}{s}$

$$(b+c)^a=(s-a)^a>\frac{s-a}{(s-a)+a}=\frac{s-a}{s}$$

$$(c+a)^b=(s-b)^b>\frac{s-b}{(s-b)+b}=\frac{s-b}{s}$$

故 $(a+b)^c+(b+c)^a+(c+a)^b>\dfrac{s-c}{s}+\dfrac{s-a}{s}+\dfrac{s-b}{s}=2$ 。