

九十七學年度臺北市  
高級中學數學及自然學科能力競賽  
數學科筆試（一）試題

編號：\_\_\_\_\_（學生自填）

**注意事項：**

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

**問題一：**試求所有可能的有理數  $x$ ，使得  $9x^2 + 23x - 2$  之值恰為兩個連續正偶數的乘積。 (12 分)

**問題二：**給定一凸四邊形  $ABCD$ 。若兩對角線  $\overline{AC}$  與  $\overline{BD}$  互相垂直；又其內部有一點  $P$  滿足  $\overline{PA} = \overline{PB}$ 、 $\overline{PC} = \overline{PD}$ 、且  $\triangle PAB$  與  $\triangle PCD$  的面積相等，則  $A, B, C$  與  $D$  四點共圓。試證之。（只證明  $\overline{AB}$  與  $\overline{CD}$  不平行的情形即可。） (12 分)

**問題三：**考慮平面上 100 條相異的直線，其中任意三條直線都不共點。設  $p$  表示這 100 條直線將平面分割成的區域數，而  $q$  表示交點的個數，試求  $p - q$  之所有可能的值，並證明你(妳)的答案。 (12 分)

**問題四：**(1) 設  $a > 0$  且  $0 < b < 1$ ，試確定  $a^b$  與  $\frac{a}{a+b}$  之大小關係。(5 分)

(2) 試證：對任意三個正實數  $a, b, c$ ，下述不等式恆成立：

$$(a+b)^c + (b+c)^a + (c+a)^b > 2。 \quad (8 分)$$