九十七學年度臺北市

高級中學數學及自然學科能力競賽

口試問題

問題一：設實函數 f 滿足 $f(0)=0$ 且 $f(x+y)=f(\frac{\pi}{2}-x)f(y)+f(\frac{\pi}{2}-y)f(x)$ 對任意實數 x,y 都成立，試證：對任意實數 x ，$|f(x)|\leq 1$。

【參考解答】 令 $x=y=\frac{\pi}{2}$ 代入原式，可得 $f(\pi)=0$。再令 $x=y=\pi$ 代入原式，可得 $f(2\pi)=0$。於是，取 $x=\frac{\pi}{2}, y=0$ 代入原式，可得 $f(\frac{\pi}{2})=\left(f(\frac{\pi}{2})\right)^2$ ，因此，$f(\frac{\pi}{2})=0$ 或 $f(\frac{\pi}{2})=1$ 。

（i）若 $f(\frac{\pi}{2})=0$ ，則取 $y=0$ ，可得 $f(x)=f(\frac{\pi}{2}-x)f(0)+f(\frac{\pi}{2})f(x)=0$ 。

（ii）若 $f(\frac{\pi}{2})=1$ ，則對任意的實數 x，令 $y=\frac{\pi}{2}-x$ ，可得

$$1=f(\frac{\pi}{2})=f(x+y)=f(y)f(y)+f(x)f(x)=f(y)^2+f(x)^2 \text{ 。}$$

因此，$|f(x)|\leq 1$。

問題二：設 α,β 都是實數，若不論 α 值為何，方程式 $x^4-2x^2+\alpha x+\beta^2=0$ 的四個根都是實根，試證：$|\beta|\leq 1$。

【參考解答】設四個實根為 x_1,x_2,x_3,x_4，則利用根與係數的關係，可得

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0 \text{，} \sum_{1\leq i<j\leq 4} x_i\cdot x_j=-2 \text{，且 } x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4=\beta^2 \text{ 。}$$

（i）若 $\beta=0$，則顯然 $|\beta|\leq 1$，且方程式至少有一零根。

（ii）若 $\beta\neq 0$，則 x_1,x_2,x_3,x_4 均不為零，所以 x_1^2,x_2^2,x_3^2,x_4^2 均為正數。

由於 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2\sum_{1\leq i,j\leq 4} x_i\cdot x_j=0^2-2\times(-2)=4$ ，

再利用算幾不等式：$\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}{4}\geq\sqrt[4]{x_1^2\cdot x_2^2\cdot x_3^2\cdot x_4^2}=|\beta|$，可得 $|\beta|\leq 1$。