九十七學年度台南區

高級中學數學及自然科能力競賽

數學科筆試(二)【參考解答】

1. 【解】$3\ell+4m+5n=12$ ， 利用柯西不等式得 $\dfrac{144}{50}\le \ell^2+m^2+n$ 。

   $\ell=\dfrac{36}{50}$　　$m=\dfrac{48}{50}$　　$n=\dfrac{60}{50}$

2. 【解】設 $x^2+18x+30=t$ 代入原方程式，解得 $t=10$ 或 $t=-4$（不合）

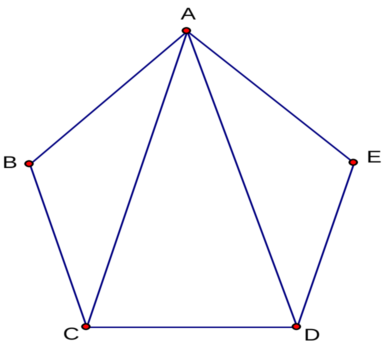
   再解得原方程式所有實根乘積為 **20**

3. 【解】由右圖可知

$$\left(\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}}\right)^2=\left(\frac{\overline{AD}\cdot\overline{AE}\cdot\cos36^\circ}{\overline{AD}\cdot\overline{AC}\cdot\cos36^\circ}\right)^2=\frac{a^2}{\overline{AC}^2}$$

利用餘弦定理得

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos108^\circ$$
$$=2a^2+2a^2\sin18^\circ$$
$$=\frac{3+\sqrt5}{2}a^2 \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}}\right)^2=\frac{3-\sqrt5}{2}$$ 。



4. 【解】設另一根為 α ，

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\left(2-\sqrt3\right)=\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}\\ \alpha\left(2-\sqrt3\right)=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\ 4 \qquad \Rightarrow\ \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$$

又 $\left(\sin\theta-\cos\theta\right)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=1-\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\ \sin\theta-\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ （$\because 0<\theta<\frac{\pi}{4}\ \therefore \sin\theta<\cos\theta$）

5. 【解】

$f(x-1)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x+1$

x用$x+1$代

$\Rightarrow f(x)=(x+1)^n+(x+1)^{n-1}+(x+1)^{n-2}+\cdots+(x+1)^2+(x+1)+1$

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{(x+1)^{n+1}-1}{(x+1)-1}$

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{(x+1)^{n+1}-1}{x}$

$\because (x+1)^{n+1}=\binom{n+1}{0}x^{n+1}+\binom{n+1}{1}x^n+\binom{n+1}{2}x^{n-1}+\binom{n+1}{3}x^{n-2}+\cdots+\binom{n+1}{n-1}x^2+\binom{n+1}{n}x+\binom{n+1}{n+1}$

$\Rightarrow f(x)=\binom{n+1}{0}x^n+\binom{n+1}{1}x^{n-1}+\binom{n+1}{2}x^{n-2}+\binom{n+1}{3}x^{n-3}+\cdots+\binom{n+1}{n-2}x^2+\binom{n+1}{n-1}x+\binom{n+1}{n}$

又已知$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$

$\Rightarrow a_k=\binom{n+1}{n-k}$

$\Rightarrow a_3=\binom{23+1}{23-3}=\binom{24}{20}=10626$