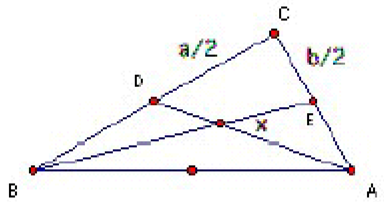
九十七學年度台南區

高級中學數學及自然科能力競賽

數學科筆試(一)【參考解答】

問題一： 坐標平面上，有一直角三角形ΔABC， $\angle C$ 為直角，$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 為ΔABC 三中線；已知$\overline{AD}$ 落在直線 $x-y+3=0$ 上，$\overline{BE}$ 落在直線 $2x-y+4=0$ 上，又$\overline{AB}$ 長為 60 ，試求ΔABC 面積。

【解】如圖，設$\overline{AD}$ 與$\overline{BE}$ 之交角為 x ，則 $\tan x=\dfrac{2-1}{1+2\cdot 1}=\dfrac{1}{3}$



$\because \angle ADC+\angle C+\angle BEC+(180°-x)=360°$

$\therefore \angle ADC+\angle BEC=90°+x$

設 $\angle ADC=\alpha$ 且 $\angle BEC=\beta$ $\quad \therefore \alpha+\beta=90°+x$

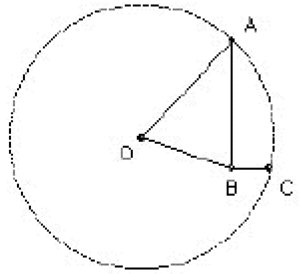
又 $\tan(90°+x)=-\cot x=-3$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}}{1-\frac{2b}{a}\cdot\frac{2a}{b}}=-\frac{2}{3}\frac{b^2+a^2}{ab}=-\frac{60^2}{3\Delta ABC}$$

$\Rightarrow \quad \Delta ABC=\dfrac{60^2}{9}=400$ 。

問題二： 如圖，A 、C 在以O 為圓心，半徑為$\sqrt{50}$ 的圓周上，若 $\angle ABC=90°$ ，$\overline{AB}=6$ ，$\overline{BC}=2$ ，則 $\overline{OB}$ ＝？

【解】 令 $\angle OAB=\alpha$ ，$\angle BAC=\beta$ $\quad \because \overline{AC}=\sqrt{40}$



$\therefore \cos(\alpha+\beta)=\dfrac{50+40-50}{2\sqrt{50}\sqrt{40}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad \tan(\alpha+\beta)=2$

又 $\tan\beta = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$$2 = \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\tan\alpha + \frac{1}{3}}{1 - \frac{\tan\alpha}{3}}$$

解得 $\tan\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 。 利用餘弦定理，得 $\overline{OB} = \sqrt{26}$

問題三：設 x_1 ，x_2 ，⋯，x_{2008} 均為複數，且滿足下列兩條件：

(1). $|x_k| = 1$ ，$k = 1$ ，2 ，⋯，2008 ；(2). $\sum_{k=1}^{2008} x_k = 0$ ，

試求 $\sum_{k=2}^{2008} |x_1 - x_k|^2$ 之值。

【解】由條件(1)可得 $x_k\overline{x_k} = |x_k|^2 = 1$，$k = 1$，$2$，⋯，$2008$；

由條件(2)可得 $\sum_{k=1}^{2008}\overline{x_k} = \overline{\sum_{k=1}^{2008} x_k} = 0$。

故
$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{2008}|x_1 - x_k|^2 &= \sum_{k=2}^{2008}(x_1 - x_k)(\overline{x_1} - \overline{x_k}) \\ &= \sum_{k=2}^{2008}(x_1\overline{x_1} + x_k\overline{x_k} - x_1\overline{x_k} - \overline{x_1}x_k) \\ &= 2007\times 2 - x_1\times\left(\sum_{k=2}^{2008}\overline{x_k}\right) - \overline{x_1}\times\left(\sum_{k=2}^{2008}x_k\right) \\ &= 2007\times 2 - x_1\times(-\overline{x_1}) - \overline{x_1}\times(-x_1) = 4016\end{aligned}$$

問題四：設 $[x]$ 為小於或等於 x 之最大整數，試解方程式 $x^2 - 97[x] + 7 = 0$ 。

【解】設 x 為該方程式的解，令 $[x] = n$ .... (1)

$97n = x^2 + 7 > 0 \Rightarrow n > 0$ .... (2)

(1) $\Rightarrow \because n \le x < n+1$ .... (3)

(3) $\Rightarrow n^2 + 7 \le 97n < (n+1)^2 + 7 = n^2 + 2n + 8$ .... (4)

(2)(4) $\Rightarrow n = 95$、96 .... (5)

(5) $\Rightarrow x^2 = 97n - 7 = 97\cdot 95 - 7 = 9028$ 或 $x^2 = 97n - 7 = 97\cdot 96 - 7 = 9035$

$\Rightarrow x = \sqrt{9028}$ 或 $\sqrt{9035}$

問題五： 將 2008 分解成一些正整數之和，使得這些正整數之乘積有最大值，求這最大值，並加以證明。

【解】將 2008 分割成正整數和的方法是有限的，所以相對應的乘積個數也是有限的，而這有限個乘積中，必定有一個數是最大的，因此最大值存在。

假設有一個分割使得 $a_1+a_2+\ldots\_a_n=2008$，相對應的乘積是

$$\coprod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdots\cdots a_n \text{ ，}$$

現將某些 a_i 做適當的替代，使得它們的和不變，而相對應的乘積增加。

假如某一分割含有一個 $a_i \geq 4$，我們就用 2 和 a_i-2 這兩數來代替它，它們的和不變，因為 $2+(a_i-2)=a_i$，但是在相對應的乘積中，因為 a_i 將變成 $2*(a_i-2)=2a_i-4$，由於 $a_i \geq 4$，故 $2a_i-4 \geq a_i$，這個方式將>3 的數轉換成一些 2 和 3 的和，並且新分割相對應的乘積最少等於原分割相對應的乘積。另外，如果 $a_i=1$，將它和某個 a_j 相加，並且用 a_j+1 代替 1 和 a_j。這新分割的和保持不變，而 a_j+1 代替因數 $1*a_j$ 以後，將會得到一個較大的相對應乘積。這個過程只有在 $a_j=3$ 時才會造出>3 的數，但是，由上面的說明，$a_j+1=4$ 可以分割成 2 和 2，而不會影響到原來的和。把所有的 1 剔除掉以後，我們的分割裡頭，將只剩下一些 2 和 3，所以相對映的乘積具有 2^x*3^y 的形式。假如 $x \geq 3$，用兩個 3 來代替三個 2，因為 2+2+2=3+3，所以這不會影響到和，但是 $2^3 < 3^2$，所以這個過程會使相對應的乘積增大。因此最大的乘積，會是下列的形式:

$$2^a \cdot 3^b, a=0,\ 1,\ \text{或}\ 2$$

因為 2008=2*2+3*668，它的有最大乘積的分割將包含 668 個 3 和兩個 2，所以最大的乘積是 $2^2 \cdot 3^{668}$