

九十七學年度新竹區
高級中學數學及自然科能力競賽

口試問題

問題一：設 $a = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}}$ ，則 a 的整數部分為何？

【參考解答】

由 $\frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$ 得

$$a < 1 + 2 \sum_{k=2}^{99} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = 1 + 2(\sqrt{99} - 1) < 19,$$

再由 $\frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ 得

$$a > 1 + 2 \sum_{k=2}^{99} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = 1 + 2(\sqrt{100} - \sqrt{2}) > 18.$$

故 $18 < a < 19$ 。