九十七學年度台北區

高級中學數學及自然科能力競賽

數學科筆試(一)【參考解答】

問題一： 設 a,b,c 為整數且 $a \neq 0$. 若方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的根為有理數，

試證：a,b,c 中至少有一個是偶數。

【解】

由公式可得方程式的兩根：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},(a\neq 0)$ 為有理數，

所以 $\sqrt{b^2-4ac}=k$ 為整數，即 $b^2-4ac=k^2$ (1)

假設 a,b,c 均為奇數，則 k 亦為奇數；令 $b=2m+1,k=2n+1$，其中 m,n 為整數。由(1)式可得

$$(2m+1)^2-4ac=(2n+1)^2$$
$$\Rightarrow ac=(m-n)(m+n+1)$$

所以 ac 必為偶數，此與假設矛盾。故，a,b,c 三數之中至少有一個是偶數。

問題二： 設函數 f 滿足 $f(1)=2$，且對每一個正整數 x，$f(x+3)\geq f(x)+3$、$f(x+1)\leq f(x)+1$ 都成立，試求 $f(2008)$ 之值。

【解】

$$\begin{aligned}
&3\leq f(x+3)-f(x)\\
&=f(x+3)-f(x+2)+f(x+2)-f(x+1)+f(x+1)-f(x)\\
&\leq 1+1+1=3\\
&\Rightarrow f(x+3)-f(x+2)=f(x+2)-f(x+1)=f(x+1)-f(x)=1\\
&\Rightarrow f(2008)=f(2008)-f(2007)+f(2007)-f(2006)+\ldots+f(2)-f(1)+f(1)\\
&\qquad\qquad\;=2007+2=2009
\end{aligned}$$

問題三： 數列$\{y_n\}$滿足$y_1=1$且$y_{k+1}=\frac{1}{2}{y_k}^2+y_k$， $k=1,2,3,\cdots$，已知

$$A\le \frac{2}{y_1+2}+\frac{2}{y_2+2}+\cdots+\frac{2}{y_{2008}+2}<A+1$$，其中A為整數。

試求A之值。

【解】

由 $y_{k+1}=\frac{1}{2}{y_k}^2+y_k$得到 $y_{k+1}>y_k$且 $\frac{1}{y_k}-\frac{1}{y_{k+1}}=\frac{y_{k+1}-y_k}{y_k y_{k+1}}=\frac{1}{y_k+2}$

$$\begin{aligned}&\frac{2}{y_1+2}+\frac{2}{y_2+2}+\cdots+\frac{2}{y_{2008}+2}\\&=2\left[\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}\right)+\left(\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{y_{2008}}-\frac{1}{y_{2009}}\right)\right]\\&=\frac{2}{y_1}-\frac{2}{y_{2009}}\end{aligned}$$

因為$y_3=\frac{33}{8}>2$，所以$2>\frac{2}{y_1}-\frac{2}{y_{2009}}>\frac{2}{1}-\frac{2}{y_3}>1$，因而

$$1<\frac{2}{y_1+2}+\frac{2}{y_2+2}+\cdots+\frac{2}{y_{2008}+2}<2$$

故$A=1$。

兩個關鍵

1 會拆$\frac{1}{y_k}-\frac{1}{y_{k+1}}=\frac{y_{k+1}-y_k}{y_k y_{k+1}}=\frac{1}{y_k+2}$

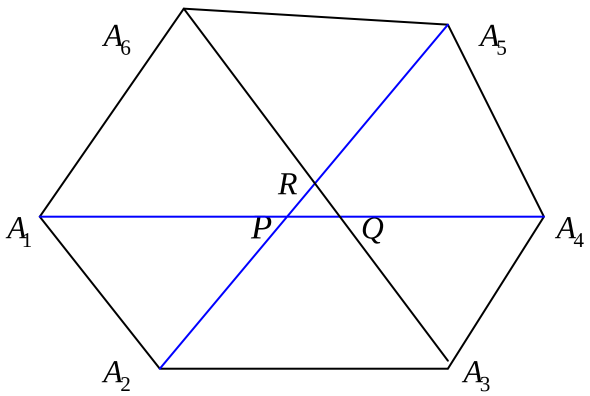
2.最後要用到$y_{k+1}>y_k$

問題四：設一圓內接六邊形 $A_1A_2\cdots A_6$ 的面積為 a。

試證：以 $A_1, A_2,\cdots, A_6$ 任三點為頂點的三角形中，必有一個三角形的面積不小於 $\frac{a}{3}$。

【解】

證明：對任意內接六邊形 $A_1A_2\cdots A_6$，也必有一個三角形，其面積不小於 $\frac{a}{3}$。



設三條對角線交於點 P,Q,R，如圖所示(P,Q,R 可以重疊)，則六邊形 $A_1A_2\cdots A_6$ 可被 ΔPA_1A_2，ΔPA_4A_5，ΔQA_3A_4，ΔQA_6A_1，ΔRA_2A_3，ΔRA_5A_6 所覆蓋，故此六個三角形面積和不小於 a，即

$$\Delta PA_1A_2+\Delta PA_4A_5+\Delta QA_3A_4+\Delta QA_6A_1+\Delta RA_2A_3+\Delta RA_5A_6\geq a \text{。}$$

不失一般性，設 $\overline{A_1P}\geq\overline{A_4P}$，則

$$\Delta A_1A_2A_5=\Delta PA_1A_2+\Delta PA_1A_5\geq\Delta PA_1A_2+\Delta PA_4A_5 \text{。}$$

同理，設 $\overline{A_6Q}\geq\overline{A_3Q}$，則 $\Delta A_1A_4A_6=\Delta QA_1A_6+\Delta QA_6A_4\geq\Delta QA_1A_6+\Delta QA_3A_4$；

設 $\overline{A_3R}\geq\overline{A_6R}$，則 $\Delta A_2A_3A_5=\Delta RA_2A_3+\Delta RA_3A_5\geq\Delta RA_2A_3+\Delta RA_5A_6$。

因此，$\Delta A_1A_2A_5+\Delta A_1A_4A_6+\Delta A_2A_3A_5\geq a$。故此三個三角形中至少有一三角形，其面積不小於 $\frac{a}{3}$。