

九十七學年度台北區
高級中學數學及自然科能力競賽
數學科筆試(一)試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

問題一：設 a, b, c 為整數且 $a \neq 0$ 。若方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根為有理數，
試證： a, b, c 中至少有一個是偶數。(12 分)

問題二：設函數 f 滿足 $f(1) = 2$ ，且對每一個正整數 x ， $f(x+3) \geq f(x) + 3$ 、
 $f(x+1) \leq f(x) + 1$ 都成立，試求 $f(2008)$ 之值。(12 分)

問題三：數列 $\{y_n\}$ 滿足 $y_1 = 1$ 且 $y_{k+1} = \frac{1}{2}y_k^2 + y_k$ ， $k = 1, 2, 3, \dots$ ，已知

$$A \leq \frac{2}{y_1 + 2} + \frac{2}{y_2 + 2} + \dots + \frac{2}{y_{2008} + 2} < A + 1, \text{ 其中 } A \text{ 為整數。}$$

試求 A 之值。(12 分)

問題四：設一圓內接六邊形 $A_1A_2 \cdots A_6$ 的面積為 a 。

試證：以 A_1, A_2, \dots, A_6 任三點為頂點的三角形中，必有一個三角形的面積

不小於 $\frac{a}{3}$ 。(13 分)